บทที่ 3
ความน่าจะเป็น

88520159

PROBABILITY AND STATISTICS FOR COMPUTING

ความน่าจะเป็น (Probability)

- การคาดคะเนผลที่อาจเกิดขึ้นของเหตุการณ์ต่าง ๆ
- ช่วยในการตัดสินใจ ตัดสินใจปัญหา
- การคาดคะเนนั้นอาจจะถูกหรือผิดก็ได้
- มีการกำหนดค่าเป็นตัวเลขเพื่อบอกค่าของการคาดคะเนว่ามีโอกาสจะเกิดขึ้นตามที่คาดไว้มากน้อยเพียงใด

การทดลองความน่าจะเป็น

- การทดลองความน่าจะเป็น (Probability experiment)
- กระบวนการในการที่จะก่อให้เกิดชุดของข้อมูล หรือ ผลลัพธ์ (outcome)
- ไม่สามารถคาดคะเนผลการทดลองล่วงหน้าได้ว่าผลจะเป็นอย่างไร
- การศึกษาโอกาส (Chance) หรือความน่าจะเป็นของการที่จะเกิดผลแบบใดแบบหนึ่งว่าเป็นเท่าใด

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample space)

- เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดของการทดลองความน่าจะเป็นใด ๆ
- เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S
- ผลแต่ละตัวที่เกิดขึ้นของปริภูมิตัวอย่าง เรียกว่า จุดตัวอย่าง (sample point) หรือ สมาชิก (element)

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample space)

ตัวอย่าง จงหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (sample space) ต่อไปนี้

1. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง

2. การโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

3. การโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง เมื่อสนใจจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัว

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample space)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (sample space) ต่อไปนี้

4. การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เมื่อสนใจแต้มที่ได้

5. การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เมื่อสนใจแต้มที่ได้ว่าเป็นเลขคู่หรือเลขคี่

6. โยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample space)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (sample space) ของการทดลอง โยนเหรียญ 1 เหรียญ หากขึ้นหัวจะโยนเหรียญอีก 1 เหรียญ แต่ถ้าขึ้นก้อยจะโยนลูกเต๋า 1 ลูก

สามารถเขียนแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้

เหตุการณ์ (Event)

- ไม่ได้สนใจผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้น
- แต่สนใจผลลัพธ์บางส่วนที่เกิดขึ้น → เหตุการณ์ (Event)
- เซตย่อย (subset) ของปริภูมิตัวอย่าง เขียนแทนด้วย E, A, B

<u>ตัวอย่าง</u> ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัว 2 ครั้ง $E_1 =$

ถ้า E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง $E_2 =$

ถ้า E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ได้หัวเลย $E_3 =$

เหตุการณ์ (Event)

ตัวอย่าง จงหาเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. ในการตรวจสอบคุณภาพของหลอดไฟ 2 หลอด จงเขียนเหตุการณ์ที่ผลการตรวจสอบได้หลอดไฟดีอย่างน้อย 1 หลอด

2. การทดลองโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง จงเขียนเหตุการณ์ต่อไปนี้

A = เหตุการณ์ที่ได้หัว 2 เหรียญ, B = เหตุการณ์ทีได้ก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ

1. เทคนิคการนับ (Counting Techniques)

- จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในการทดลองบางอย่างมีมากมาย
- ต้องอาศัยเทคนิคการนับเข้ามาช่วย

1.1 หลักการคูณ (Multiplication Rule)

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

1.1 หลักการคูณ (Multiplication Rule)

การทดลองหนึ่งประกอบด้วย r ขั้นตอน โดยขั้นตอนแรกเลือกทำได้ n_1 วิธี และขั้นตอนที่สองเลือกทำได้ n_2 วิธี และ ขั้นตอนที่สามเลือกทำได้ n_3 วิธี .. ขั้นตอนที่ k ทำได้ n_r วิธี จำนวนวิธีทั้งหมดจะเท่ากับ

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r \text{ วิธี}$$

1.1 หลักการคูณ (Multiplication Rule)

1. หญิงคนหนึ่งมีสร้อย 5 เส้น และต่างหู 6 คู่ จะเลือกเครื่องประดับได้กี่วิธี

<u>วิธีคิด</u> ขั้นตอนที่ 1 เลือกสร้อย ทำได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกต่างหู ทำได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกเครื่องประดับ เท่ากับ 5 x 6 = 30 วิธี

2. จงหาจำนวนผลลัพธ์ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ พร้อมกับทอดลูกเต๋า 1 ลูก

1.1 หลักการคูณ (Multiplication Rule)

3. การเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ต้องผ่านทางบก ทางทะเล และทางอากาศ โดยทางบกมี 2 เส้นทาง ทางทะเลมี 3 เส้นทาง และทางอากาศมี 2 เส้นทาง จงหาจำนวนวิธีที่จะเดินทางจาก A ไป B

4. สถานีรถไฟแห่งหนึ่งมีชานชาลาจอดรถไฟทั้งหมด 7 ชานชาลา ถ้ามีรถไฟเข้าจอด 4 ขบวน จะมีวิธีจัดรถไฟให้เข้าจอดในชานชาลาได้กี่วิธี

1.1 หลักการคูณ (Multiplication Rule)

5. มีตัวเลขอยู่ 6 ตัว คือ 1-6 ต้องการสร้างเลข 3 หลัก โดยใช้เลขซ้ำได้จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน และถ้าห้ามใช้เลขซ้ำจะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีคิด – กรณีที่เลขซ้ำกัน

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างเลข 3 หลัก โดยที่เลขซ้ำกันได้ วิธี

- กรณีที่เลขไม่ซ้ำกัน

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างเลข 3 หลัก โดยที่เลขไม่ซ้ำกันได้ วิธี

1.1 หลักการคูณ (Multiplication Rule)

6. มีตัวเลขอยู่ 10 ตัว คือ 0-9 ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวก 3 หลัก มีกี่จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว โดยแต่ละหลักมีตัวเลขไม่ซ้ำกัน

<u>วิธีคิด</u> กรณีที่หลักหน่วยเป็น 0

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี (เลข 0)

กรณีที่หลักหน่วยเป็น 5

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ วิธี (เลข 5)

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดคือ วิธี

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

การนำสิ่งของซึ่งมีอยู่ทั้งหมด หรือบางส่วนมาจัด โดยถือว่าลำดับมีความสำคัญ

1

จำนวนวิธีจัดลำดับของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นแนวตรง จะสามารถจัดได้

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 \text{ วิธี}$$

เมื่อ $0! = 1$

<u>ตัวอย่าง</u> มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a, b, c ต้องการนำตัวอักษร 3 ตัวนี้มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะทำได้กี่วิธี

จะเห็นว่าเมื่อนำตัวอักษร 3 ตัวนี้มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะได้

{abc, acb, bac, bca, cab, cba}

ดังนั้น สามารถสร้างข้อความได้ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

2

จำนวนวิธีจัดเรียงของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดครั้งละ r สิ่ง เมื่อ r < n จะมีวิธีจัดได้

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

<u>ตัวอย่าง</u> มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a, b, c ต้องการนำตัวอักษร 2 ตัว มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะทำได้กี่วิธี

จะเห็นว่าเมื่อนำตัวอักษร 2 ตัว จากทั้งหมด 3 ตัว มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะได้

{ab, ac, ba, bc, ca, cb}

ดังนั้น สามารถสร้างข้อความได้ $P_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 \times 2 = 6$ วิธี

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

3

จำนวนวิธีในการจัดลำดับของครั้งละ r สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง ($r \leq n$) โดยอนุญาตให้ของซ้ำกันได้ จะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมด n^r วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a, b, c ต้องการนำตัวอักษร 2 ตัวนี้มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ โดยให้ตัวอักษรซ้ำกันได้ จะทำได้กี่วิธี

จะเห็นว่าเมื่อนำตัวอักษร 2 ตัว จากทั้งหมด 3 ตัว มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ โดยตัวอักษรซ้ำกันได้ จะได้

{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc}

ดังนั้น มีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรได้ทั้งหมด $3^2 = 9$ วิธี

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

1. ในการจัดลำดับภาพยนตร์ที่ชื่นชอบทั้งหมด 4 เรื่อง สามารถจัดลำดับแตกต่างกันได้กี่วิธี

2. การออกรางวัลเลขท้าย 3 ตัวโดยให้ประกอบไปด้วยเลข 2, 5, 7 จะออกรางวัลได้ทั้งหมดกี่วิธี

3. มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 6 ตัว จากคำว่า SUNDAY โดยไม่ให้ใช้ตัวอักษรซ้ำกันจะได้ทั้งหมดกี่วิธี

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

4. มีข้อสอบอยู่ 5 ข้อ แจกให้นิสิต 3 คน คนละ 1 ข้อ จะมีวิธีแจกกี่วิธี เพื่อให้

   4.1 นิสิตแต่ละคนได้ข้อสอบซ้ำกันได้

   4.2 นิสิตแต่ละคนได้ข้อสอบซ้ำกันไม่ได้

5. จากคำว่า BYTES จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว โดยกำหนดว่าจะต้องขึ้นต้นด้วยตัวอักษร B

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

6. ในการประชุมของสมาคมศิษย์เก่า ต้องเลือกคณะกรรมการ ประกอบไปด้วย ประธาน เหรัญญิก และเลขานุการ หากมีสมาชิก 7 คน อยากทราบว่าจะมีคณะกรรมการที่เป็นไปได้จำนวนกี่ชุด

7. การออกแบบวงจรไฟฟ้าโดยเลือกตัวต้านทาน 4 ชุด จากตัวต้านทานที่มีความแตกต่างกันทั้งหมด 8 ชุด มาต่ออนุกรมกัน จงหาว่ามีวงจรไฟฟ้าที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่ คือ การจัดของบางส่วนหรือทั้งหมด โดยไม่คำนึงถึงลำดับ

4 จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดทีละ r สิ่ง คือ

$$ {}^{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

*การจัดสิ่งของลักษณะนี้จะเรียกว่าเป็นการจัดสิ่งของแบบสุ่มไม่ใส่คืน

<u>ตัวอย่าง</u> มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a,b,c ต้องการจัดกลุ่มตัวอักษร กลุ่มละ 2 ตัวได้กี่วิธี

จะเห็นว่าจัดได้ 3 วิธีคือ {a,b} , {a,c} , {b,c}

ข้อสังเกต เมื่อไม่คำนึงถึงลำดับ {a,b} กับ {b,a} ถือเป็นกลุ่มเดียวกัน นับเป็นแค่ 1 วิธี

ดังนั้น จัดกลุ่มตัวอักษร ได้ ${}^{3}C_{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ วิธี

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

1. มีลูกบอลอยู่ 5 สีคือ ส้ม ฟ้า แดง เขียว ดำ ต้องการเลือกมา 2 สีจะเลือกได้ทั้งหมดกี่วิธี

2. ในการเลือกกรรมการสมาคม 5 คน จากผู้สมัครทั้งหมด 9 คน จะทำได้กี่วิธี

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

3. ในการเลือกกรรมการตัดสินร้องเพลงทั้งหมด 5 คน ต้องการกรรมการผู้ชาย 2 คน หญิง 3 คน จากผู้สมัครที่เป็นผู้ชาย 5 คน ผู้หญิง 7 คน จะสามารถเลือกกรรมการได้ทั้งหมดกี่วิธี

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

4. ถ้ามีนักคณิตศาสตร์ 5 คน นักฟิสิกส์ 7 คน และต้องเลือกตัวแทน 3 คน โดยที่

4.1 ตัวแทนทั้ง 3 จะเป็นใครก็ได้

4.2 มีตัวแทน 1 คนมาจากฟิสิกส์

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

4.3 มีตัวแทนอย่างน้อย 1 คนมาจากคณิตศาสตร์

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

5. ร้านขายของเก่าแห่งหนึ่งมีแจกันโบราณอยู่ 7 ใบ เป็นแจกันมีตำหนิอยู่ 3 ใบ ถ้าลูกค้ามาซื้อแจกัน 4 ใบ อยากทราบว่าจะเป็นไปได้กี่วิธีที่ลูกค้าจะได้แจกันมีตำหนิอย่างน้อย 2 ใบ

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of an event)

- ความน่าจะเป็น หมายถึง ตัวเลขที่แสดงถึงโอกาสของการเกิดสิ่งที่เราสนใจ ว่ามีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

    2.1 ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม (Classical probability)

    2.2 ความน่าจะเป็นจากการทดลอง (Empirical probability)

2.1 ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม

ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม (Classical probability)

กำหนดให้ A แทนเหตุการณ์ใด ๆ ของปริภูมิตัวอย่าง S และ n(A) แทนจำนวนเหตุการณ์ A ที่สนใจ และ n(S) แทนจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดในปริภูมิตัวอย่าง ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทน ด้วย P(A) มีค่าดังนี้

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

2.1 ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม

ตัวอย่าง ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 3

2. ลูกเต๋าขึ้นแต้มไม่ต่ำกว่า 4

2.1 ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม

ตัวอย่าง กล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟดี 7 ดวง และหลอดไฟเสีย 3 ดวง ปนกัน สุ่มหยิบหลอดไฟมา 5 ดวง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้หลอดไฟดีทั้งหมด

2.1 ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม

ตัวอย่าง ในการจัดนักบาสเกตบอล 7 คน ลงแข่งในแต่ละตำแหน่งที่แตกต่างกัน 5 ตำแหน่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้นาย ก และนาย ข ลงในตำแหน่งที่ 1 และ ที่ 2 ตามลำดับ

2.1 ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม

ตัวอย่าง ในสำนักงานแห่งหนึ่ง มีเลขาอยู่ 3 คน นักบัญชี 4 คน และพนักงานต้อนรับ 2 คน หากต้องการพนักงาน 3 คน มาเป็นตัวแทนของพนักงานในสำนักงาน ให้หาความน่าจะเป็นที่ จะได้พนักงานในแต่ละตำแหน่งๆละคน

2.2 ความน่าจะเป็นจากการทดลอง

ความน่าจะเป็นจากการทดลอง (Empirical probability)

ในการทดลองหนึ่งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด n ทาง และมีผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่เราสนใจ (เหตุการณ์ A) อยู่ m ทาง ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทน ด้วย P(A) มีค่าดังนี้

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

2.2 ความน่าจะเป็นจากการทดลอง

ตัวอย่าง จากการสอบถามนิสิตคณะวิทยาศาสตร์จำนวน 100 คน เกี่ยวกับการถอนรายวิชาต่าง ๆ ที่กำลังศึกษาอยู่ ได้ข้อมูลแยกตามเพศ ดังนี้

เพศ	รายวิชาที่ถอน			รวม
	แคลคูลัส	ฟิสิกส์	สถิติ	
ชาย	25	18	19	62
หญิง	12	20	6	38
รวม	37	38	25	100

ถ้าสุ่มนิสิตมา 1 คน จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่นิสิตจะถอนรายวิชาฟิสิกส์

2. ความน่าจะเป็นที่นิสิตเป็นผู้หญิงและถอนรายวิชาแคลคูลัส

2.2 ความน่าจะเป็นจากการทดลอง

<u>ตัวอย่าง</u> ในบันทึกของโรงพยาบาลแสดงจำนวนวันที่คนไข้พักรักษาตัวในโรงพยาบาล

จำนวนวันที่พัก	จำนวนคนไข้
3	15
4	32
5	56
6	19
7	5
รวม	127

จงหาความน่าจะเป็นที่

1. คนไข้อยู่โรงพยาบาล 5 วัน

2. คนไข้อยู่โรงพยาบาลน้อยกว่า 6 วัน

3. คนไข้อยู่โรงพยาบาลอย่างมาก 4 วัน

3. กฎของความน่าจะเป็น

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น

กำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในปริภูมิตัวอย่าง S และ $\emptyset$ คือเซตว่าง คุณสมบัติของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A มีดังนี้

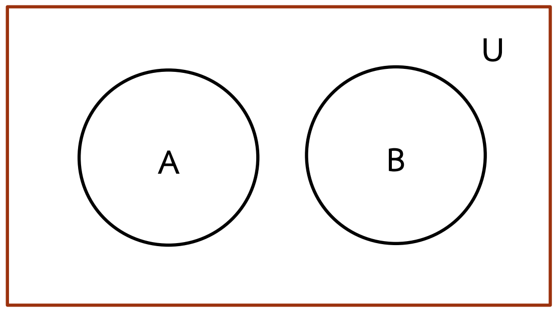
1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\emptyset) = 0$ และ $P(S) = 1$

3. $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

เหตุการณ์ที่แยกจากกันโดยเด็ดขาด



$$A \cap B = \emptyset$$

1

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้ ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A หรือ B จะเกิดขึ้น คือ

$$P(A \text{ หรือ } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จงพิจารณาเหตุการณ์ต่อไปนี้ว่าเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกันได้หรือไม่

1. ได้แต้มคู่และแต้มคี่
2. ได้แต้ม 3 และแต้มคี่
3. ได้แต้มคี่และแต้มน้อยกว่า 4
4. ได้แต้มมากกว่า 4 และน้อยกว่า 4

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ ให้หาความน่าจะเป็นที่จะมีแต้ม 4 หรือ A

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 4

B คือเหตุการณ์ที่ได้แต้ม A

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

<u>ตัวอย่าง</u> จิตรกรคนหนึ่งมีหมวกสีแดง 3 ใบ หมวกสีดำ 2 ใบ และหมวกสีน้ำตาล 4 ใบ ถ้าจิตรกรเลือกหมวกมาใส่โดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้หมวกสีดำหรือน้ำตาล

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ได้หมวกสีดำ

B คือเหตุการณ์ที่ได้หมวกสีน้ำตาล

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

ตัวอย่าง คณะวิทยาการสารสนเทศมีนิสิตจบการศึกษาทั้งสิ้นจำนวน 126 คน เป็นสาขา SE จำนวน 50 คน สาขา CS จำนวน 23 คน สาขา IT จำนวน 38 คน และสาขา IF จำนวน 15 คน หากสุ่มเลือกนิสิตมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นิสิตที่จบจากสาขา SE หรือ IT หรือ IF

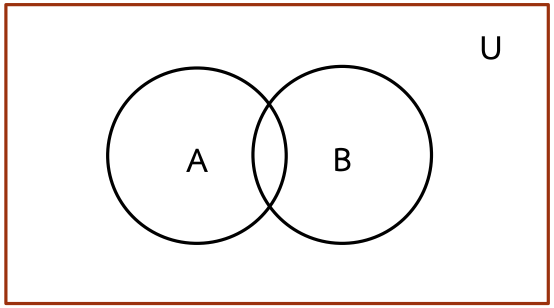
วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่นิสิตที่จบจากสาขา SE

B คือเหตุการณ์ที่นิสิตที่จบจากสาขา IT

C คือเหตุการณ์ที่นิสิตที่จบจากสาขา IF

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

เหตุการณ์ที่ไม่แยกจากกันโดยเด็ดขาด



$A \cap B \neq \emptyset$

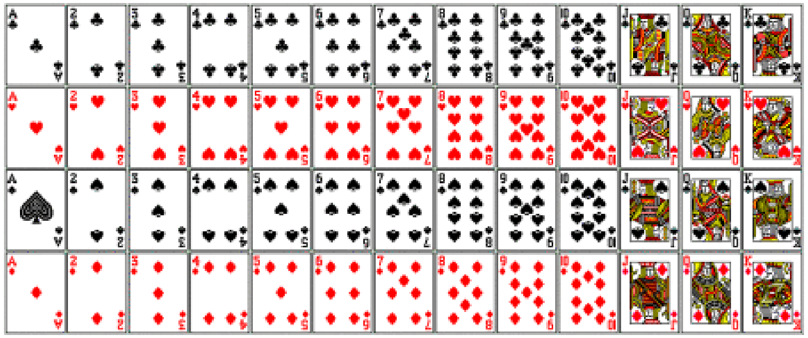
2

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นร่วมกันหรือพร้อมกันได้ ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A หรือ B จะเกิดขึ้น คือ

$$P(A \text{ หรือ } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

<u>ตัวอย่าง</u> ในการหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่คิง หรือไพ่สีแดง



<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ได้ไพ่คิง

B คือเหตุการณ์ที่ได้ไพ่สีแดง

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

ตัวอย่าง ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มน้อยกว่า 3 หรือเป็นเลขคี่

วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่แต้มน้อยกว่า 3

B คือเหตุการณ์ที่ได้เลขคี่

3.1 กฎการบวก (Addition Rules)

<u>ตัวอย่าง</u> ในการสอบถามความคิดเห็นจำนวน 180 คน เกี่ยวกับการโฆษณาเครื่องดื่มที่ผสมแอลกอฮอล์ในช่วงที่เวลาก่อน 22.00 น. ได้ผลสรุปดังนี้

ความคิดเห็น	เพศ	
	ชาย	หญิง
เห็นด้วย	22	15
ไม่เห็นด้วย	48	65
ไม่มีความคิดเห็น	10	20

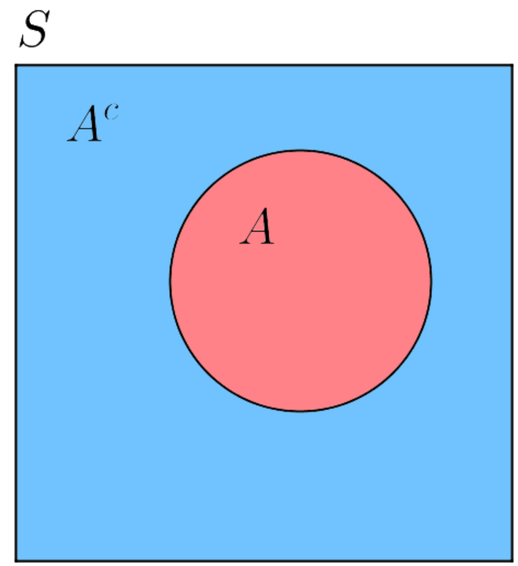
ถ้าสุ่มคนมา 1 คน

จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ตอบว่าเห็นด้วย
2. เป็นผู้หญิงและไม่เห็นด้วย
3. เป็นผู้ชายหรือเห็นด้วย
4. เห็นด้วยหรือไม่มีความคิดเห็น

3.2 คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ (Complement event)

ในการทดลองเชิงสุ่มใดๆ ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น คอมพลีเมนต์ของ A เขียนแทนด้วย A’ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้



1. $A \cup A' = S$
2. $A \cap A' = \emptyset$

ถ้า A' เป็น Complementary event ของ A แล้ว

$$P(A') = 1 - P(A)$$

3.2 คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ (Complement event)

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

วิธีทำ ให้ E คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

2. ลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูก

วิธีทำ ให้ E คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

E’ คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูก

3.2 คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ (Complement event)

ตัวอย่าง ในการแจกรางวัลครั้งหนึ่ง มีผู้ได้รับรางวัล 3 คน และมีรางวัลให้ 8 อย่าง ถ้าให้แต่ละคนเลือกรับรางวัลคนละ 1 อย่าง จาก 8 อย่างนี้ โดยจะเลือกรางวัลซ้ำกันก็ได้ จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้ง 3 คน จะเลือกรางวัลซ้ำกันอย่างน้อย 1 คู่

วิธีทำ ให้ E คือเหตุการณ์ที่ทั้ง 3 คน จะเลือกรางวัลซ้ำกันอย่างน้อย 1 คู่

E’ คือเหตุการณ์ที่ทั้ง 3 คน จะเลือกรางวัลไม่ซ้ำกันเลย

3.2 คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ (Complement event)

<u>ตัวอย่าง</u> ความน่าจะเป็นที่นิสิตคนหนึ่งจะสอบผ่าน Programming เท่ากับ 2/3 และความน่าจะเป็นที่เขาสอบผ่าน Discrete เท่ากับ 4/9 ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาสอบผ่านทั้ง 2 วิชาเท่ากับ 1/5

ให้ A คือเหตุการณ์ที่สอบผ่าน Programming

B คือเหตุการณ์ที่สอบผ่าน Discrete

จงหาความน่าจะเป็นที่นิสิตคนนี้จะ

1. สอบผ่านอย่างน้อย 1 วิชา

2. สอบไม่ผ่านทั้ง 2 วิชา

3.3 กฎการคูณ (อิสระ)

- กฎการคูณ สามารถนำมาใช้ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์สองเหตุการณ์หรือมากกว่าที่เกิดขึ้นตามลำดับ
- กฎการคูณ กฎที่ 1 เหตุการณ์เป็นอิสระกัน โดยการเกิดเหตุการณ์แรกไม่ส่งผลกระทบต่อโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สอง
- หาความน่าจะเป็นแต่ละเหตุการณ์ก่อน และคูณความน่าจะเป็นเข้าด้วยกัน

1

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ทั้งสองจะเกิดขึ้น เท่ากับ

$$P(A \text{ และ } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

3.3 กฎการคูณ (อิสระ)

<u>ตัวอย่าง</u> ในการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญและทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก ให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้หัวในการโยนเหรียญ และได้ 4 ในการทอดลูกเต๋า

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่โยนเหรียญแล้วได้หัว

B คือเหตุการณ์ที่การทอดลูกเต๋าแล้วได้ 4

3.3 กฎการคูณ (อิสระ)

ตัวอย่าง กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก และสีขาว 5 ลูก สุ่มหยิบมา 2 ครั้ง โดยหยิบทีละลูกแล้วใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป จงหาความน่าจะเป็นที่ ได้สีน้ำเงินทั้ง 2 ครั้ง

วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบลูกบอลได้สีน้ำเงิน

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบลูกบอลได้สีน้ำเงิน

3.3 กฎการคูณ (อิสระ)

ตัวอย่าง กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก และสีขาว 5 ลูก สุ่มหยิบมา 2 ครั้ง โดยหยิบทีละลูกแล้วใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป จงหาความน่าจะเป็นที่ ได้สีน้ำเงินและสีขาวตามลำดับ

วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบลูกบอลได้สีน้ำเงิน

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบลูกบอลได้สีขาว

3.3 กฎการคูณ (อิสระ)

<u>ตัวอย่าง</u> ในการหยิบไพ่ 3 ใบแบบใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่ควีน คิง และเอซ ตามลำดับ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบไพ่ได้ควีน

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบไพ่ได้คิง

C คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 3 หยิบไพ่ได้เอซ

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

- ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ *B* ภายใต้เงื่อนไขว่าเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว (Conditional probability of *B* given *A*)
- เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ *P*(*B*/*A*) อ่านว่า Probability of *B* given *A*

<u>ตัวอย่าง</u> โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

ถ้าให้ A คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกแรกขึ้นแต้ม 1
B คือเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มของลูกเต๋าทั้งสองน้อยกว่า 4

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ภายใต้เงื่อนไขของเหตุการณ์ A เกิดขั้นแล้ว คือ

$$P(B|A) = \frac{2}{6}$$

3.3 กฎการคูณ (ไม่อิสระ)

- เหตุการณ์แรกมีผลกระทบต่อการเกิดเหตุการณ์ที่สอง จะกล่าวได้ว่าทั้งสองเหตุการณ์นั้น *ไม่เป็นอิสระต่อกัน (dependent)*
- กฎการคูณ กฎที่ 2 เมื่อเหตุการณ์ไม่เป็นอิสระต่อกัน โดยการเกิดเหตุการณ์แรกจะส่งผลกระทบต่อโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สอง

2

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เป็นอิสระกัน ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ทั้งสองจะเกิดขึ้น เท่ากับ

$$P(A \text{ และ } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

3.3 กฎการคูณ (ไม่อิสระ)

ตัวอย่าง คน ๆ หนึ่งมีแผ่น CD เพลงอยู่ 30 แผ่น โดยเป็นเพลงลูกทุ่ง 5 แผ่น หากสุ่มหยิบ CD มา 2 แผ่น ทีละแผ่นแบบไม่ใส่คืน ให้หาความน่าจะเป็นที่ CD ทั้งสองแผ่นจะเป็นเพลงลูกทุ่ง

วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบได้เพลงลูกทุ่ง

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบได้เพลงลูกทุ่ง

3.3 กฎการคูณ (ไม่อิสระ)

<u>ตัวอย่าง</u> ในการหยิบไพ่ 3 ใบ จากสำรับแบบไม่ใส่คืน ให้หาความน่าจะเป็นที่
1. ได้โพธิ์ดำทั้งสามใบ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 1 ได้ โพธิ์ดำ
B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 2 ได้ โพธิ์ดำ
C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 3 ได้ โพธิ์ดำ

กฎการคูณ (ไม่อิสระ)

2. ได้ไพ่เอซ, คิง, และควีน ตามลำดับ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 1 ได้ เอซ

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 2 ได้ คิง

C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 3 ได้ ควีน

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

- ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ *B* ภายใต้เงื่อนไขว่าเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว (Conditional probability of *B* given *A*)
- เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ *P*(*B*/*A*) อ่านว่า Probability of *B* given *A*

ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B เกิดขึ้น หลังจากเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว หาได้จากสูตร

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

หรือ

ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้น หลังจากเหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้ว หาได้จากสูตร

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

ตัวอย่าง ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีผู้มีอายุตั้งแต่ 20 ถึง 60 ปีอยู่ 500 คน เมื่อแบ่งตามเพศและสภาพการมีงานทำแล้ว ได้ตัวเลขดังนี้ ถ้าเลือกคนในหมู่บ้านมา 1 คนเพื่อเป็นตัวแทนของหมู่บ้าน

เพศ	การมีงานทำ		รวม
	มีทำ	ไม่มีทำ	
ชาย	230	10	240
หญิง	70	190	260
รวม	300	200	500

1. หาความน่าจะเป็นที่ผู้ได้รับเลือกเป็นผู้ชาย โดยกำหนดว่าจะต้องเป็นผู้มีงานทำ

2. ถ้ากำหนดว่าต้องเป็นผู้หญิง จงหาความน่าจะเป็นที่คนนั้นจะไม่มีงานทำ

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

1. หาความน่าจะเป็นที่ผู้ได้รับเลือกเป็นผู้ชาย โดยกำหนดว่าจะต้องเป็นผู้มีงานทำ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้มีงานทำ

B คือเหตุการณ์ที่เป็นเพศชาย

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

2. ถ้ากำหนดว่าต้องเป็นผู้หญิง จงหาความน่าจะเป็นที่คนนั้นจะไม่มีงานทำ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่เป็นเพศหญิง

B คือเหตุการณ์ที่เป็นไม่มีงานทำ

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

<u>ตัวอย่าง</u> กล่องใบหนึ่งบรรจุเหรียญสีดำและสีขาว หากเราหยิบเหรียญมาสองเหรียญโดยไม่ใส่คืน และทราบว่าความน่าจะเป็นที่หยิบเหรียญหนึ่งได้สีดำและเหรียญหนึ่งได้สีขาวเท่ากับ 15/56 และความน่าจะเป็นที่หยิบเหรียญแรกเป็นสีดำคือ 3/8 ให้หาความน่าเป็นที่จะหยิบเหรียญที่สองเป็นสีขาว เมื่อหยิบเหรียญแรกได้สีดำ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่หยิบเหรียญแรกเป็นสีดำ

B คือเหตุการณ์ที่หยิบเหรียญที่สองเป็นสีขาว

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

<u>ตัวอย่าง</u> ข้อมูลนี้เป็นการสำรวจ IQ และการมียีนเฉพาะชนิดใดชนิดหนึ่ง ในเด็กจำนวน 102 คน

ให้หาความน่าจะเป็นที่

IQ	ยีน		รวม
	มียีน	ไม่ยีน	
สูง	33	19	52
ต่ำ	39	11	50
รวม	72	30	102

1. เด็กคนหนึ่งไม่มียีนเฉพาะชนิดนี้อยู่
2. เด็กคนหนึ่งจะมี IQ สูง โดยที่มียีนเฉพาะชนิดนี้อยู่ด้วย
3. เด็กคนหนึ่งไม่มียีนชนิดนี้อยู่ โดยที่มี IQ ต่ำ