บทที่ 3 ความน่าจะเป็น

ในชีวิตประจำวันของคนเรานั้นจะต้องประสบปัญหาต่าง ๆ ที่จะต้องตัดสินใจอยู่เสมอ การคาดคะเนผลที่อาจเกิดขึ้นของเหตุการณ์ต่าง ๆ เพื่อช่วยในการตัดสินใจจึงเป็นสิ่งจำเป็น การคาดคะเนของเรามักจะทำอย่างคร่าว ๆ เพียงเพื่อตัดสินใจปัญหาแต่ละข้อ และการคาดคะเนนั้นอาจจะถูกหรือผิดก็ได้ ในทางคณิตศาสตร์มีการกำหนดค่าเป็นตัวเลขเพื่อบอกค่าของการคาดคะเนว่ามีโอกาสจะเกิดขึ้นตามที่คาดไว้มากน้อยเพียงใดซึ่งเรียกว่าความน่าจะเป็น

3.1 การทดลองความน่าจะเป็นและปริภูมิตัวอย่าง (Probability experiment and Sample Space)

การทดลองความน่าจะเป็น (Probability experiment) หมายถึงกระบวนการในการที่จะก่อให้เกิดชุดของข้อมูล เช่น การโยนเหรียญ การทอดลูกเต๋า หรือการเลือกไพ่จากสำรับ กระบวนการเหล่านี้เป็นการทดลองที่ทำให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ (outcome) เมื่อเราโยนเหรียญหนึ่งเหรียญจะมีผลลัพธ์อยู่สองแบบที่เป็นไปได้คือ หัวหรือก้อย ผลของการทดลองที่ออกมาแตกต่างกันนั้นสะท้อนให้เห็นถึงความหมายของคาว่า “ความไม่แน่นอน (Uncertainty)” ความน่าสนใจจะอยู่ที่การศึกษาโอกาส (Chance) หรือความน่าจะเป็นของการที่จะเกิดผลแบบใดแบบหนึ่งว่าเป็นเท่าใด

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample space) หมายถึงเซตของผลลัพธ์ทั้งหมดของการทดลองความน่าจะเป็นใด ๆ มักจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S และผลแต่ละอย่างที่เกิดขึ้นหรือสมาชิกของแต่ละตัวของปริภูมิตัวอย่าง เรียกว่าจุดตัวอย่าง (sample point) หรือ สมาชิก (element)

ตัวอย่าง 3.1 จงหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (sample space) ของการทดลองต่อไปนี้

1. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง
   S = {H, T}   โดยที่ H หมายถึง หัวและ T หมายถึง ก้อย

2. การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เมื่อสนใจแต้มที่ได้
   S = {1,2,3,4,5,6}

3. การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เมื่อสนใจแต้มที่ได้ว่าเป็นเลขคู่หรือเลขคี่
   S = {แต้มคู่, แต้มคี่}

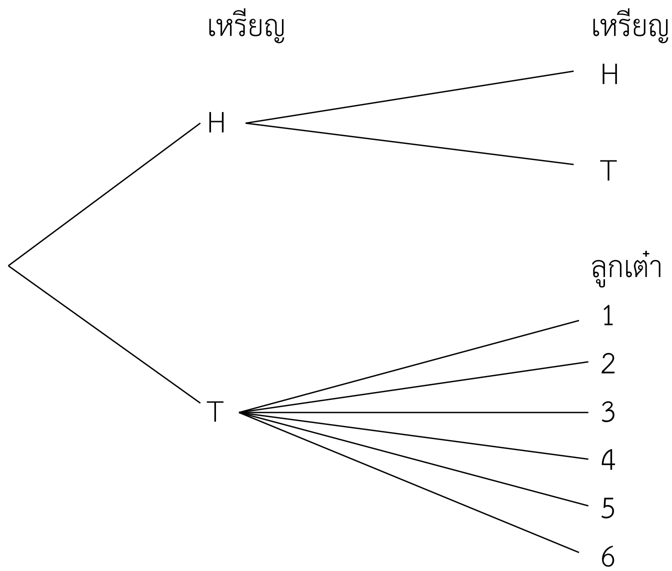
4. การโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง
   S = {HT,HH,TH,TT}

5. โยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก
   S={H1,H2,H3,H4,H5,H6,T1,T2,T3,T4,T5,T6}

6. เพศของบุตรของครอบครัวหนึ่งที่มีบุตร 3 คน
   S={MMM,MMF,MFM,FMM,FFF,FFM,FMF,MFF}

7. การโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง เมื่อสนใจจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัว
   S = {0,1,2,3}

8. โยนเหรียญ 1 เหรียญ หากขึ้นหัวจะโยนเหรียญอีก 1 เหรียญ แต่ถ้าขึ้นก้อยจะโยลูกเต๋า 1 ลูก สามารถเขียนแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้



   S = {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

ในบางครั้งเราอาจไม่ได้สนใจผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม แต่เราสนใจผลลัพธ์เพียงบางส่วนที่อาจเกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม เราเรียกเซตของผลลัพธ์บางส่วนนี้ว่า เหตุการณ์

เหตุการณ์ (Event) คือ เซตย่อย (subset) ของปริภูมิตัวอย่าง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือผลลัพธ์ที่เราสนใจจากการทดลอง อาจประกอบด้วยผลลัพธ์หนึ่งผลลัพธ์ หรือมากกว่าหนึ่งผลลัพธ์ก็ได้ ถ้าเหตุการณ์นั้นประกอบด้วย 1 ผลลัพธ์จะเรียกว่า เหตุการณ์เชิงเดี่ยว (Simple event) และถ้าเหตุการณ์นั้นประกอบด้วยผลลัพธ์ตั้งแต่ 2 ผลลัพธ์ขึ้นไปจะเรียกว่า เหตุการณ์เชิงประกอบ (Compound event)

ตัวอย่าง 3.2 ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ

S = {HH, HT, TH, TT}

- ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัว 2 ครั้ง

  E_1 = {HH}

- ถ้า E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

  E_2 = {HH, HT, TH}
- ถ้า E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ได้หัวเลย

  E_3 = {TT}

ตัวอย่าง 3.3 จงหาเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. จากการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก จงหาเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวและลูกเต๋าออกแต้มคู่
   E = {H2, H4, H6}

2. จากการทดลองทอดลูกเต๋า 2 ลูก จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าออกแต้มเหมือนกันทั้ง 2 ลูก
   E = {11, 22, 33, 44, 55, 66}

3. เพศของบุตรของครอบครัวหนึ่งที่มีบุตร 3 คน จงหาเหตุการณ์ที่ได้ลูกชายอย่างน้อย 1 คน
   E = {MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF}

3.2 เทคนิคการนับ (Counting Techniques)

ในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นจะต้องทราบจำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในแต่ละการทดลอง แต่การทดลองบางอย่างอาจมีผลลัพธ์เกิดขึ้นมาได้มากมายจนทำให้เสียเวลาในการเขียนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ดังนั้นจึงต้องอาศัยหลักการนับเพื่อช่วยในการคำนวณหาจำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นดังกล่าว

3.2.1 หลักการคูณ (Multiplication Rule)

เหตุการณ์หนึ่ง ประกอบด้วย n ขั้นตอน โดยขั้นตอนแรกเลือกทำได้ k_1 วิธี และ ขั้นตอนที่สองเลือกทำได้ k_2 วิธี และ ขั้นตอนที่สามเลือกทำได้ k_3 วิธี ไปเรื่อย ๆ จำนวนวิธีทั้งหมดจะเท่ากับ

$$k_1 \times k_2 \times k_3 \times \ldots \times k_n \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 3.4 ถ้ามีถนนเชื่อมระหว่างเมือง ก และเมือง ข 4 สาย และถนนเชื่อมระหว่างเมือง ข และเมือง ค 5 สาย การเดินทางจากเมือง ก ไปยังเมือง ค โดยให้ผ่านเมือง ข จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 เดินทางจากเมือง ก ไปเมือง ข ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เดินทางจากเมือง ข ไปเมือง ค ทำได้ 5 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเดินทางจากเมือง ก ไปยังเมือง ค โดยให้ผ่านเมือง ข คือ 4 x 5 = 20 วิธี

ตัวอย่าง 3.5 จงหาจำนวนผลลัพธ์ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ พร้อมกับทอดลูกเต๋า 1 ลูก

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 โยนเหรียญ 1 เหรียญ ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก ได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ พร้อมกับทอดลูกเต๋า 1 ลูก เท่ากับ $6 \times 2 = 12$ วิธี

ตัวอย่าง 3.6 ชายคนหนึ่งมีเสื้ออยู่ 5 สี คือ สีฟ้า แดง เขียว เหลือง ส้ม มีกางเกงอยู่ 3 สี คือ สีดำ ขาว น้ำตาล และมีรองเท้าอยู่ 2 คู่ อยากทราบว่า ชายคนนี้จะมีวิธีการแต่งตัวทั้งหมดกี่วิธีโดยไม่ซ้ำกัน

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 สามารถเลือกเสื้อได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 สามารถเลือกกางเกงได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 สามารถเลือกใส่รองเท้าได้ 2 วิธี

ดังนั้น ชายคนนี้จะมีวิธีการแต่งตัวทั้งหมด $5 \times 3 \times 2 = 30$ วิธี

ตัวอย่าง 3.7 มีตัวเลขอยู่ 6 ตัว คือ 1-6 ต้องการสร้างเลข 3 หลัก โดยใช้เลขซ้ำได้จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน และถ้าห้ามใช้เลขซ้ำจะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ - กรณีที่เลขซ้ำกัน

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 6 วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 6 วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างเลข 3 หลัก โดยที่เลขซ้ำกันได้ $6 \times 6 \times 6 = 216$ วิธี

- กรณีที่เลขไม่ซ้ำกัน

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 6 วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 5 วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 4 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างเลข 3 หลัก โดยที่เลขไม่ซ้ำกันได้ $6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี

ตัวอย่าง 3.8 มีตัวเลขอยู่ 10 ตัว คือ 0-9 ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวก 3 หลัก มีกี่จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว โดยแต่ละหลักมีตัวเลขไม่ซ้ำกัน

วิธีทำ กรณีที่หลักหน่วยเป็น 0

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 8 วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 9 วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 1 วิธี (เลข 0)

กรณีที่หลักหน่วยเป็น 5

หลักร้อย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 7 วิธี

หลักสิบ สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 9 วิธี

หลักหน่วย สามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 1 วิธี (เลข 5)

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดคือ $(8 \times 9 \times 1) + (7 \times 9 \times 1) = 135$ วิธี

3.2.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

การเรียงสับเปลี่ยน คือ การนำสิ่งของซึ่งมีอยู่ทั้งหมด หรือบางส่วนมาจัด โดยถือว่าลำดับมีความสำคัญ

การเรียงสับเปลี่ยนหรือการจัดลำดับเป็นการหาจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการจัดเรียงสิ่งของบางส่วนหรือทั้งหมดที่แตกต่างกันโดยถือลำดับเป็นสำคัญ นั่นคือเมื่อมีการสลับที่กันแล้วความหมายเปลี่ยนไป เช่น การจัดคนลงตำแหน่งงาน การจัดลำดับการผลิต การจัดลำดับการให้บริการ การสลับที่ตัวอักษรที่ใช้เป็นรหัส

จำนวนวิธีจัดลำดับของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นแนวตรง จะสามารถจัดได้

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 \text{ วิธี}$$

เมื่อ $0! = 1$

ตัวอย่าง 3.9 มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a, b, c ต้องการนำตัวอักษร 3 ตัวนี้มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะทำได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> เมื่อนำตัวอักษร 3 ตัวนี้มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะได้

{abc, acb, bac, bca, cab, cba}

หรือคำนวณจำนวนวิธีได้จาก

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งแรกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งที่สองได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งที่สามได้ 1 วิธี

ดังนั้น สามารถสร้างข้อความได้ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ตัวอย่าง 3.10 ในการจัดลำดับภาพยนตร์ที่ชื่นชอบทั้งหมด 4 เรื่อง สามารถจัดลำดับแตกต่างกันได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ขั้นตอนที่ 1 เลือกภาพยนตร์ที่ชื่นชอบลำดับที่ 1 ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกภาพยนตร์ที่ชื่นชอบลำดับที่ 2 ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกภาพยนตร์ที่ชื่นชอบลำดับที่ 3 ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกภาพยนตร์ที่ชื่นชอบลำดับที่ 4 ได้ 1 วิธี

ดังนั้น สามารถจัดลำดับภาพยนตร์ที่ชื่นชอบได้ $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

ตัวอย่าง 3.11 การชมคอนเสิร์ตของศิลปินคนหนึ่งมีที่นั่งสำหรับบัตร VIP 10 ที่นั่ง ซึ่งไม่มีหมายเลขกำกับไว้ถ้าผู้ที่ซื้อบัตร VIP มาถึงเวทีคอนเสิร์ตพร้อมกันทั้งหมดจะสามารถจัดคนเหล่านี้เข้าไปนั่งเก้าอี้ทั้งหมดได้แตกต่างกันกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ขั้นตอนที่ 1 จัดคนเข้านั่งเก้าอี้ตัวที่ 1 ได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดคนเข้านั่งเก้าอี้ตัวที่ 2 ได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จัดคนเข้านั่งเก้าอี้ตัวที่ 3 ได้ 8 วิธี

...

ขั้นตอนที่ 4 จัดคนเข้านั่งเก้าอี้ตัวที่ 10 ได้ 1 วิธี

ดังนั้น สามารถจัดคนเข้าไปนั่งเก้าอี้ทั้งหมดได้แตกต่างกัน $10! \approx 3.62$ ล้าน วิธี

ตัวอย่าง 3.12 การออกรางวัลเลขท้าย 3 ตัวโดยให้มีเลข 2, 5, 7 รวมอยู่ด้วยจะออกรางวัลได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขในตำแหน่งแรกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขในตำแหน่งที่สองได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขในตำแหน่งที่สามได้ 1 วิธี

ดังนั้น สามารถออกรางวัลเลขท้าย 3 ตัวได้ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ตัวอย่าง 3.13 มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 6 ตัว จากคำว่า SUNDAY โดยไม่ให้ใช้ตัวอักษรซ้ำกันจะได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งแรกได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งที่สองได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งที่สามได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งแรกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งที่สองได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 6 เลือกตัวอักษรในตำแหน่งที่สามได้ 1 วิธี

ดังนั้น สามารถสร้างข้อความได้ $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ตัวอย่าง 3.14 อู่รถยนต์แห่งหนึ่งรับงานซ่อมรถยนต์ไว้ 7 คัน อู่นี้สามารถจัดลำดับการซ่อมได้แตกต่างกันกี่วิธี เมื่อกำหนดว่า

1. ไม่มีเงื่อนไขใดๆ

<u>วิธีทำ</u> จัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันได้ $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5{,}040$ วิธี

2. ในจำนวนนี้มีรถยนต์ A และ B รวมอยู่ด้วยและจะต้องซ่อมต่อเนื่องกันรถยนต์

<u>วิธีทำ</u> มัดรวม A และ B ติดกัน

จัดลำดับการซ่อมรถยนต์ 6 คัน ได้ $6!$ วิธี

จัดลำดับซ่อมรถยนต์ A และ B ได้ $2!$ วิธี

ดังนั้น สามารถจัดลำดับการซ่อมรถ ได้ $6!2! = 1{,}140$ วิธี

3. A และ B ต้องใช้เครื่องมือบางอย่างร่วมกันไม่สามารถซ่อมต่อเนื่องกันได้

<u>วิธีทำ</u> จำนวนวิธีทั้งหมด – จำนวนวิธีที่ตอเนื่องของ A และ B

$5{,}040 - 1{,}140 = 3{,}600$ วิธี

4. รถยนต์ A และ B ต้องซ่อมเป็นคันแรก และครั้งสุดท้าย

<u>วิธีทำ</u>

จัดลำดับการซ่อมรถยนต์ 5 คัน ได้ $5!$ วิธี

จัดลำดับซ่อมรถยนต์ A และ B ได้ $2!$ วิธี

ดังนั้น สามารถจัดลำดับการซ่อมรถ ได้ $5!2! = 240$ วิธี

จำนวนวิธีจัดเรียงของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดครั้งละ r สิ่ง เมื่อ r < n จะมีวิธีจัดได้

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่าง 3.15 มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a, b, c ต้องการนำตัวอักษร 2 ตัวนี้มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ เมื่อนำตัวอักษร 2 ตัว จากทั้งหมด 3 ตัว มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ จะได้

{ab, ac, ba, bc, ca, cb}

หรือคำนวณจำนวนวิธีได้จาก

ในตำแหน่งแรกสามารถเลือกตัวอักษรได้ 3 วิธี

ในตำแหน่งที่สองสามารถเลือกตัวอักษรได้ 2 วิธี

สามารถสร้างข้อความได้ 3 x 2 = 6 วิธี

หรือ สามารถสร้างข้อความได้ $P_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!}$ = 3 x 2 = 6 วิธี

ตัวอย่าง 3.16 ถ้าชั้นหนังสือสามารถวางหนังสือได้ 4 เล่ม จะจัดหนังสือเข้าในชั้นได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้ามีหนังสือทั้งหมด 9 เล่ม

วิธีทำ

สามารถสร้างข้อความได้ $P_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!}$ = 9 x 8 x7 x 6 = 3024 วิธี

ตัวอย่าง 3.17 การออกแบบวงจรไฟฟ้าโดยเลือกตัวต้านทาน 4 ชุด จากตัวต้านทานที่มีความแตกต่างกันทั้งหมด 8 ชุด มาต่ออนุกรมกัน จงหาว่ามีวงจรไฟฟ้าที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ

มีวงจรไฟฟ้าที่เป็นไปได้ทั้งหมด $P_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!}$ = 8 x 7 x 6 x 5 = 1680 แบบ

ตัวอย่าง 3.18 จากคำว่า BYTES จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว โดยกำหนดว่าจะต้องขึ้นต้นด้วยตัวอักษร B

วิธีทำ

จำนวนวิธีที่จะจัดเรียงตัวอักษรโดยขึ้นต้นด้วย B ได้ทั้งหมด $P_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!}$ = 4 x 3 = 12 วิธี

จำนวนวิธีในการจัดลำดับของครั้งละ r สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง ($r \leq n$) โดยอนุญาตให้ของซ้ำกันได้ จะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมด n^r วิธี

ตัวอย่าง 3.19 มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a, b, c ต้องการนำตัวอักษร 2 ตัวนี้มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ โดยให้ตัวอักษรซ้ำกันได้ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ เมื่อนำตัวอักษร 2 ตัว จากทั้งหมด 3 ตัว มาเรียงต่อกันเป็นข้อความ โดยตัวอักษรซ้ำกันได้ จะได้

{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc}

หรือคำนวณจำนวนวิธีได้จาก

ในตำแหน่งแรกสามารถเลือกตัวอักษรได้ 3 วิธี

ในตำแหน่งที่สองสามารถเลือกตัวอักษรได้ 3 วิธี

ในตำแหน่งที่สามสามารถเลือกตัวอักษรได้ 3 วิธี

ดังนั้น มีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรได้ทั้งหมด $3^2 = 9$ วิธี

ตัวอย่าง 3.20 มีข้อสอบอยู่ 5 ข้อ ต้องการแจกให้กับนิสิต 3 คน ๆ ละ 1 ข้อ จะมีวิธีแจกกี่วิธี โดยให้นิสิตแต่ละคนได้ข้อสอบซ้ำกันได้

วิธีทำ

มีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรได้ทั้งหมด $5^3 = 125$ วิธี

3.2.3 การจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่ คือ การจัดของบางส่วนหรือทั้งหมด โดยไม่คำนึงถึงลำดับ

ในการวางแผนงานหรือในการแก้ปัญหาบางครั้งเราอาจต้องการหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนโดยไม่คำนึงถึงอันดับหรือการสลับที่ เช่น การวางแผนการจัดแข่งขันกีฬาฟุตบอลจำนวน 5 ทีม จะต้องจัดกี่ครั้งเมื่อจัดการแข่งขันแบบพบกันหมด หาก 5 ทีมประกอบด้วย A B C D และ E การจัด A แข่งกับ B ย่อมไม่แตกต่างกับ B แข่งกับ A เขียนแสดงจำนวนวิธีทั้งหมดที่มีและไม่มีความหมายดังนี้

AB, BA	BC, CB	CD, DC
AC, CA	BD, DB	CE, EC
AD, DA	BE, EB	DE, ED
AE, EA		

จะเห็นว่าจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ 20 วิธี แต่จำนวนวิธีที่มีความหมายจริงๆจะเท่ากับ 10 วิธี นี่คือความหมายของการเรียงสับเปลี่ยนแบบไม่ให้ความสำคัญของลำดับ ปัญหาดังกล่าวนี้เป็นปัญหา

ที่เรียกว่า การจัดหมู่ การหาจำนวนวิธีการจัดหมู่นั้นสามารถหาได้จากการนำจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ได้หารด้วยจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแต่ละครั้ง เช่น การหาจำนวนครั้งที่ต้องจัดการแข่งขันฟุตบอล 5 ทีมหาได้จาก

เรียงสับเปลี่ยนทีมฟุตบอล 5 ทีม ครั้งละ 2 ทีม ทำได้ $P_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!}$ = 20 วิธี

แต่ละครั้งใช้ 2 ทีม เรียงสับเปลี่ยนได้ 2! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการจัดหมู่ $\frac{5!}{2!(5-2)!}$ = 10 วิธี

จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดทีละ r สิ่ง คือ

$$ {}^{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

*การจัดสิ่งของลักษณะนี้จะเรียกว่าเป็นการจัดสิ่งของแบบสุ่มไม่ใส่คืน

ตัวอย่าง 3.21 มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a,b,c ต้องการจัดกลุ่มตัวอักษร กลุ่มละ 2 ตัวได้กี่วิธี

วิธีทำ จัดได้ 3 วิธีคือ {a,b} , {a,c} , {b,c}

ข้อสังเกต เมื่อไม่คำนึงถึงลำดับ {a,b} กับ {b,a} ถือเป็นกลุ่มเดียวกัน นับเป็นแค่ 1 วิธี

{a,c} กับ {c,a} ถือเป็นกลุ่มเดียวกัน นับเป็นแค่ 1 วิธี

{b,c} กับ {c,b} ถือเป็นกลุ่มเดียวกัน นับเป็นแค่ 1 วิธี

ดังนั้น จัดกลุ่มตัวอักษร ได้ ${}^{3}C_{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}$ = 3 วิธี

ตัวอย่าง 3.22 มีลูกบอลอยู่ 5 สีคือ ส้ม ฟ้า แดง เขียว ดำ ต้องการเลือกมา 2 สีจะเลือกได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จัดกลุ่มลูกบอล ได้ ${}^{5}C_{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$ = 10 วิธี

ตัวอย่าง 3.23 ในการเลือกกรรมการสมาคม 5 คน จากผู้สมัครทั้งหมด 9 คน จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จัดกลุ่มลูกบอล ได้ ${}^{9}C_{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!}$ = 126 วิธี

ตัวอย่าง 3.24 ในการเลือกกรรมการตัดสินร้องเพลงทั้งหมด 5 คน ต้องการกรรมการผู้ชาย 2 คน หญิง 3 คน จากผู้สมัครที่เป็นผู้ชาย 5 คน ผู้หญิง 7 คน จะสามารถเลือกกรรมการได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ

- ต้องการกรรมการผู้ชาย 2 จากผู้สมัคร 5 คน

  จะสามารถเลือกกรรมการได้ ${}^{5}C_{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$ = 10 วิธี

- ต้องการกรรมการผู้หญิง 3 จากผู้สมัคร 7 คน

จะสามารถเลือกกรรมการได้ ${}^{7}C_{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}$ = 35 วิธี

ดังนั้น จะสามารถเลือกกรรมการได้ทั้งหมดกี่วิธี 10 x 35 = 350 วิธี

ตัวอย่าง 3.25 ถ้ามีนักคณิตศาสตร์ 5 คน นักฟิสิกส์ 7 คน และต้องเลือกตัวแทน 3 คน โดยที่

1. ตัวแทนทั้ง 3 จะเป็นใครก็ได้

<u>วิธีทำ</u>

จะสามารถเลือกตัวแทนได้ ${}^{12}C_{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!}$ = 220 วิธี

2. มีตัวแทน 1 คนมาจากฟิสิกส์

<u>วิธีทำ</u>

จะสามารถเลือกตัวแทน 1 คนมาจากฟิสิกส์ได้ ${}^{7}C_{1} = \frac{7!}{1!(7-1)!}$ = 7 วิธี

และสามารถเลือกตัวแทน 2 คนมาจากคณิตศาสตร์ได้ ${}^{5}C_{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$ = 10 วิธี

ดังนั้นสามารถเลือกตัวแทน 3 คน โดยมีตัวแทนจากฟิสิกส์ 1 คน ได้ 7 x 10 = 70 วิธี

3. มีตัวแทนอย่างน้อย 1 คนมาจากคณิตศาสตร์

<u>วิธีทำ</u> - กรณีที่ มีตัวแทน 3 คนมาจากฟิสิกส์

สามารถเลือกตัวแทน 3 คนมาจากฟิสิกส์ได้ ${}^{7}C_{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}$ = 35 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกตัวแทนอย่างน้อย 1 คนมาจากคณิตศาสตร์ คิดได้จาก

จำนวนวิธีทั้งหมด - จำนวนวิธีเลือกตัวแทน 3 คนมาจากฟิสิกส์

220 – 35 = 185 วิธี

ดังนั้น สามารถตัวแทนอย่างน้อย 1 คนมาจากคณิตศาสตร์ได้ 185 วิธี

3.3 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of an event)

ความน่าจะเป็น หมายถึง ตัวเลขที่แสดงถึงโอกาสของการเกิดสิ่งที่เราสนใจ ว่ามีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

3.3.1 ความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม (Classical probability)

การหาค่าความจะน่าแบบดั้งเดิมจะเป็นของเหตุการณ์ที่เราสนใจ เป็นการหาค่าสัดส่วนระหว่างจำนวนวิธีของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเกิดขึ้นได้ในปริภูมิตัวอย่างซึ่งมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

กำหนดให้ A แทนเหตุการณ์ใด ๆ ของปริภูมิตัวอย่าง S และ n(A) แทนจำนวนเหตุการณ์ A ที่สนใจ และ n(S) แทนจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดในปริภูมิตัวอย่าง ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทน ด้วย P(A) มีค่าดังนี้

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ตัวอย่าง 3.26 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 3

   <u>วิธีทำ</u> S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

   ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 3

   A = {3}

   $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 3 คือ $\frac{1}{6}$

2. ลูกเต๋าขึ้นแต้มไม่ต่ำกว่า 4

   <u>วิธีทำ</u> S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

   ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มไม่ต่ำกว่า 4

   A = {4, 5, 6}

   $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6}$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มไม่ต่ำกว่า 4 คือ $\frac{1}{6}$

ตัวอย่าง 3.27 เมื่อหยิบไพ่ 1 จากสำรับ ซึ่งมีไพ่อยู่ 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ใบนั้นจะเป็นโพแดง

วิธีทำ ไพ่ 1 สำหรับ 52 ใบ มีอยู่ 13 ใบที่เป็นโพแดง

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่โพแดง

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบไพ่โพแดง คือ $\frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 3.28 กล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟดี 7 ดวง และหลอดไฟเสีย 3 ดวง ปนกัน สุ่มหยิบหลอดไฟมา 5 ดวง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้หลอดไฟดีทั้งหมด

วิธีทำ มีหลอดไฟทั้งหมด 10 ดวง เลือกมา 5 ดวง $C(10,5) = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$ วิธี

มีหลอดไฟดี 7 ดวง เลือกมา 5 ดวง จะได้ $C(7,5) = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21$ วิธี

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้หลอดไฟดีทั้งหมด

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{21}{252} = \frac{1}{12}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้หลอดไฟดีทั้งหมด คือ $\frac{1}{12}$

ตัวอย่าง 3.29 ในการจัดนักบาสเกตบอล 7 คน ลงแข่งขันในแต่ละตำแหน่งที่แตกต่างกัน 5 ตำแหน่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้นาย ก และนาย ข ลงในตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

วิธีทำ จำนวนวิธีจัดนักบาสเกตบอล 7 คน เลือกลงแข่งขัน 5 ตำแหน่ง ได้ $P(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = 1260$ วิธี

จำนวนวิธีให้นาย ก และนาย ข ลงในตำแหน่งที่ 1 และ 2

ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ 1 วิธี (นาย ก)

ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ 1 วิธี (นาย ข)

ตำแหน่งที่เหลืออีก 3 ตำแหน่ง จัดได้ $P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ วิธี

จำนวนวิธีที่ให้นาย ก และนาย ข ลงในตำแหน่งที่ 1 และ 2 คือ 60 วิธี

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่จัดให้นาย ก และนาย ข ลงในตำแหน่งที่ 1 และ 2

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{1260} = \frac{1}{21}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จัดให้นาย ก และนาย ข ลงในตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ คือ $\frac{1}{21}$

3.3.2 ความน่าจะเป็นจากการทดลอง (Empirical probability)

เป็นการคำนวณความน่าจะเป็นโดยใช้ข้อมูลซึ่งเกิดขึ้นจริงในอดีตมาหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นในอนาคต หรือกล่าวได้ว่า จะใช้ความถี่ที่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจในอดีตมาหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์นั้นอีกในอนาคต วิธีการหาค่าความน่าจะเป็นแบบนี้คำนวณได้จากจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่เราสนใจหารด้วยจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการทดลอง

ในการทดลองหนึ่งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด n ทาง และมีผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่เราสนใจ (เหตุการณ์ A) อยู่ m ทางดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทน ด้วย P(A) มีค่าดังนี้

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

ตัวอย่าง 3.30 จากการสอบถามนิสิตคณะวิทยาศาสตร์จำนวน 100 คน เกี่ยวกับการถอนรายวิชาต่าง ๆ ที่กำลังศึกษาอยู่ ได้ข้อมูลแยกตามเพศ ดังนี้

เพศ	**รายวิชาที่ถอน**			**รวม**
	แคลคูลัส	**ฟิสิกส์**	**สถิติ**	
ชาย	25	18	19	62
หญิง	12	20	6	38
รวม	37	38	25	100

ถ้าสุ่มนิสิตมา 1 คน จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่นิสิตจะถอนรายวิชาฟิสิกส์

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่นิสิตจะถอนรายวิชาฟิสิกส์

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{38}{100} = 0.38$$

2. ความน่าจะเป็นที่นิสิตเป็นผู้หญิงและถอนรายวิชาแคลคูลัส

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่นิสิตเป็นผู้หญิงและถอนรายวิชาแคลคูลัส

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{100} = 0.12$$

ตัวอย่าง 3.31 ในบันทึกของโรงพยาบาลแสดงจำนวนวันที่คนไข้พักรักษาตัวในโรงพยาบาล

จำนวนวันที่พัก	**จำนวนคนไข้**
3	15
4	32
5	56
6	19
7	5
รวม	127

จงหาความน่าจะเป็นที่

1. คนไข้อยู่โรงพยาบาล 5 วัน

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่คนไข้อยู่โรงพยาบาล 5 วัน

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{56}{127} = 0.44$$

2. คนไข้อยู่โรงพยาบาลน้อยกว่า 6 วัน

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่คนไข้อยู่โรงพยาบาลน้อยกว่า 6 วัน

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15 + 32 + 56}{127} = 0.81$$

3. คนไข้อยู่โรงพยาบาลอย่างมาก 4 วัน

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่คนไข้อยู่โรงพยาบาลอย่างมาก 4 วัน

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15 + 32}{127} = 0.36$$

ตัวอย่าง 3.32 บันทึกของร้านค้าแห่งหนึ่งแสดงเปอร์เซ็นต์ของจำนวนลูกค้าจำแนกตามช่วงอายุดังนี้

อายุ (ปี)	**เปอร์เซ็นต์**
น้อยกว่า 20	30
20 – 29	13
30 – 39	20
40 – 49	27
50 ขึ้นไป	10
รวม	100

ถ้าเลือกลูกค้ามาอย่างสุ่มจงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้า

1. มีอายุระหว่าง 30 – 39 ปี

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกค้าอายุระหว่าง 30 – 39 ปี

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{100} = 0.2$$

2. น้อยกว่า 30 ปี

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกค้าอายุน้อยกว่า 30 ปี

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13 + 30}{100} = 0.33$$

3. มากกว่า 29 และน้อยกว่า 50 ปี

   วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกค้าอายุมากกว่า 29 และน้อยกว่า 50 ปี

   $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20 + 27}{100} = 0.47$$

4. น้อยกว่า 20 หรือ มากกว่า 49 ปี

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกค้าอายุน้อยกว่า 20 หรือ มากกว่า 49 ปี

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30 + 10}{100} = 0.4$$

3.4 กฎของความน่าจะเป็น

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น

กำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในปริภูมิตัวอย่าง S และ Ø คือเซตว่าง คุณสมบัติของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A มีดังนี้

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$ และ $P(S) = 1$
3. $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

เนื่องจากเหตุการณ์ก็คือเซต ดังนั้นทฤษฎีหรือ operation ของเซตสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับเหตุการณ์ได้ดังนี้

1. Union คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B หรือเป็นทั้งสองเหตุการณ์ใช้สัญลักษณ์ $A \cup B$

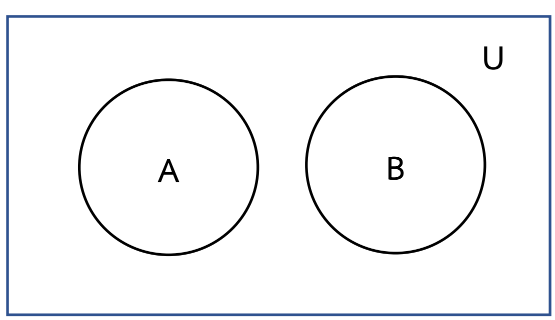
2. Intersection คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ใช้สัญลักษณ์ $A \cap B$

3. Complement คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ A ใช้สัญลักษณ์ A' หรือ A^c

3.4.1 กฎการบวก (Addition Rules)

เหตุการณ์ที่แยกจากกันโดยเด็ดขาด

ในการทดลองสุ่มใด ๆ กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้ (Mutually Exclusive Events) หรือ $A \cap B = \emptyset$ หรือกล่าวได้ว่า A กับ B ไม่มีกรณี (element) ที่เกิดร่วมกันเลย



ตัวอย่าง 3.33 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้งจงพิจารณาเหตุการณ์ต่อไปนี้ว่าเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกันได้หรือไม่

1. ได้แต้มคู่และแต้มคี่
   ตอบ ไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้
2. ได้แต้ม 3 และแต้มคี่
   ตอบ สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้
3. ได้แต้มคี่และแต้มน้อยกว่า 4
   ตอบ สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้
4. ได้แต้มมากกว่า 4 และน้อยกว่า 4
   ตอบ ไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้

ตัวอย่าง 3.34 หยิบไพ่1 ใบจากสำรับ จงพิจารณาว่าเหตุการณ์ใดเป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดพร้อมกันได้

1. ได้แต้ม 7 และ jack
   ตอบ ไม่สามารถเกิดพร้อมกันได้
2. ได้ไพ่ดอกจิกและได้ไพ่คิง
   ตอบ สามารถเกิดพร้อมกันได้
3. ได้ไพ่โพธิ์แดงและ ace
   ตอบ สามารถเกิดพร้อมกันได้
4. ได้ไพ่โพธ์ดำและโพธิ์แดง
   ตอบ ไม่สามารถเกิดพร้อมกันได้

กฎการบวก 1
ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่**ไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้** ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A หรือ B จะเกิดขึ้นคือ

$$P(A \text{ หรือ } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ตัวอย่าง 3.35 ถ้าหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ ให้หาความน่าจะเป็นที่จะมีแต้ม 4 หรือ A

วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ได้ไพ่แต้ม 4

B คือเหตุการณ์ที่ได้ไพ่แต้ม A

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = 0.15$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นความน่าจะเป็นที่จะมีแต้ม 4 หรือ A เท่ากับ 0.15

ตัวอย่าง 3.36 จิตรกรคนหนึ่งมีหมวกสีแดง 3 ใบ หมวกสีดำ 2 ใบ และหมวกสีน้ำตาล 4 ใบ ถ้าจิตรกรเลือกหมวกมาใส่โดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้หมวกสีดำหรือน้ำตาล

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ได้หมวกสีดำ

B คือเหตุการณ์ที่ได้หมวกสีดำ

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \;= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3} = 0.66$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้หมวกสีดำหรือน้ำตาล เท่ากับ 0.66

ตัวอย่าง 3.37 ในการสำรวจรายได้ต่อเดือนของคนชลบุรีได้ข้อมูลดังตารางข้างล่าง จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งจะมีรายได้ต่ำกว่า หรือสูงกว่า 15,000 บาท

รายได้	ต่ำกว่า 15,000	15,000	สูงกว่า 15,000
จำนวนคน	150	75	225

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่มีรายได้ต่ำกว่า 15,000 บาท

B คือเหตุการณ์ที่มีรายได้สูงกว่า 15,000 บาท

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \;= \frac{150}{450} + \frac{225}{450} = \frac{2}{3} = 0.83$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีรายได้ต่ำกว่า หรือสูงกว่า 15,000 บาท เท่ากับ 0.83

ตัวอย่าง 3.38 มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีนิสิตจบการศึกษาทั้งสิ้นจำนวน 126 คน เป็นสาขาคณิตศาสตร์จำนวน 50 คน สาขาสถิติจำนวน 23 คน สาขาชีววิทยา จำนวน 15 คน และสาขาฟิสิกส์จำนวน 38 คน หากสุ่มเลือกนิสิตมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นิสิตที่จบจากสาขาคณิตศาสตร์ หรือ ชีววิทยา หรือ ฟิสิกส์

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่นิสิตที่จบจากสาขาคณิตศาสตร์

B คือเหตุการณ์ที่นิสิตที่จบจากสาขาชีววิทยา

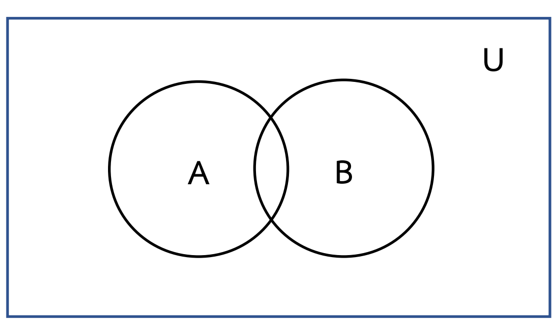
C คือเหตุการณ์ที่นิสิตที่จบจากสาขาฟิสิกส์

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{50}{126} + \frac{15}{126} + \frac{103}{126} = \frac{2}{3} = 0.82$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้นิสิตที่จบจากสาขา คณิตศาสตร์ หรือ ชีววิทยา หรือ ฟิสิกส์ เท่ากับ 0.82

เหตุการณ์ที่ไม่แยกจากกันโดยเด็ดขาด

ในการทดลองสุ่มใด ๆ กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่มีกรณี (element) ที่เกิดร่วมกันอยู่ (Non-Mutually Exclusive Events) หรือ $A \cap B \neq \emptyset$



กฎการบวก 2
ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่**เกิดขึ้นร่วมกันหรือพร้อมกันได้** ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A หรือ B จะเกิดขึ้น คือ

$$P(A \text{ หรือ } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ตัวอย่าง 3.39 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มน้อยกว่า 3 หรือเป็นเลขคี่
<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่แต้มน้อยกว่า 3 ซึ่ง A = {1, 2}
B คือเหตุการณ์ที่ได้เลขคี่ ซึ่ง B = {1, 3, 5}

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 0.66$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มน้อยกว่า 3 หรือเป็นเลขคี่ เท่ากับ $\mathbf{0.66}$

ตัวอย่าง 3.40 ในการหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่คิงหรือดอกจิก
<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ได้ไพ่คิง
B คือเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ดอกจิก

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = 0.31$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่คิงหรือดอกจิก เท่ากับ $\mathbf{0.31}$

ตัวอย่าง 3.41 ธนาคารเลือดได้เก็บรวบรวมเลือดจากผู้บริจาคเป็นเวลา 5 วัน มีจำนวนผู้บริจาคแยกตามกรุ๊ปเลือดและหมู่ Rh ดังตาราง

Rh-factor	กรุปเลือด				
	O	A	B	AB	รวม
Rh+	156	139	37	12	344
Rh-	28	25	8	4	65
รวม	184	164	45	16	409

1. จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้บริจาคจะมีเลือดกรุป O หรือ กรุป A
   <u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้บริจาคจะมีเลือดกรุป O
   B คือเหตุการณ์ที่ผู้บริจาคจะมีเลือดกรุป A

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
   $$= \frac{184}{409} + \frac{164}{409} = \frac{348}{409} = 0.85$$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้บริจาคจะมีเลือดกรุป O หรือ กรุป A เท่ากับ $\mathbf{0.31}$

2. จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้บริจาคจะมีเลือดกรุป B หรือ Rh–

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้บริจาคจะมีเลือดกรุป B

B คือเหตุการณ์ที่บริจาคจะมีเลือดหมู่ Rh–

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{45}{409} + \frac{65}{409} - \frac{8}{409} = \frac{102}{409} = 0.25$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้บริจาคจะมีเลือดกรุป B หรือ Rh– เท่ากับ 0.25

ตัวอย่าง 3.42 ในการสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับการโฆษณาเครื่องดื่มที่ผสมแอลกอฮอล์ในช่วงที่เวลาก่อน 22.00 น. ได้ผลสรุปดังนี้

ความคิดเห็น	เพศ	
	ชาย	หญิง
เห็นด้วย	22	15
ไม่เห็นด้วย	48	65
ไม่มีความคิดเห็น	10	20

ถ้าสุ่มคนมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ตอบว่าเห็นด้วย

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้ตอบว่าเห็นด้วย

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{37}{180} = 0.21$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ตอบว่าเห็นด้วย เท่ากับ 0.21

2. เป็นผู้ชาย

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้ตอบเป็นผู้ชาย

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{80}{180} = 0.44$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ตอบเป็นผู้ชาย เท่ากับ 0.44

3. เป็นผู้หญิงและไม่เห็นด้วย

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้ตอบเป็นผู้หญิงและไม่เห็นด้วย

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{65}{180} = 0.36$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นผู้หญิงและไม่เห็นด้วย เท่ากับ 0.36

4. เป็นผู้ชายหรือเห็นด้วย

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้ตอบเป็นผู้ชาย

B คือเหตุการณ์ที่ผู้ตอบเห็นด้วย

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{80}{180} + \frac{37}{190} - \frac{22}{180} = \frac{95}{180} = 0.53$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ตอบเป็นผู้ชายหรือเห็นด้วย เท่ากับ 0.53

ตัวอย่าง 3.43 ความน่าจะเป็นที่นักท่องเที่ยวจะไปเที่ยวดอยอินทนนท์เท่ากับ 0.80 ความน่าจะเป็นที่จะไปเที่ยวสวนสัตว์เชียงใหม่เท่ากับ 0.43 ความน่าจะเป็นที่จะไปเที่ยวทั้ง 2 ที่เท่ากับ 0.42 จงหาความน่าจะเป็นที่นักท่องเที่ยวจะเลือกไปเที่ยวที่ดอยอินทนนท์หรือสวนสัตว์เชียงใหม่

วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่เที่ยวดอยอินทนนท์

B คือเหตุการณ์ที่เที่ยวสวนสัตว์เชียงใหม่

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.80 + 0.43 - 0.42 = 0.81$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เที่ยวดอยอินทนนท์หรือสวนสัตว์เชียงใหม่เท่ากับ $\mathbf{0.81}$

3.4.2 คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ (Complement event)

ในการทดลองเชิงสุ่มใด ๆ ถ้า *A* เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในการทดลองนั้น Complementary ของ *A* เขียนแทนด้วย A’ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. $A \cup A' = S$
2. $A \cap A' = \phi$

ถ้า A' เป็น Complementary event ของ A แล้ว

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ตัวอย่าง 3.44 ทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

   วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

   $$P(A) = \frac{25}{36} = 0.69$$

   ดังนั้น ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มหนึ่งเลย เท่ากับ $\mathbf{0.69}$

2. ลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูก

   วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

   A’ คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูก

   $$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{25}{36} = 0.31$$

   ดังนั้น ลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูกเท่ากับ $\mathbf{0.31}$

ตัวอย่าง 3.45 ในการแจกรางวัลครั้งหนึ่ง มีผู้ได้รับรางวัล 3 คน และมีรางวัลให้ 8 อย่าง ถ้าให้แต่ละคนเลือกรับรางวัลคนละ 1 อย่าง จาก 8 อย่างนี้ โดยจะเลือกรางวัลซ้ำกันก็ได้ จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้ง 3 คน จะเลือกรางวัลซ้ำกันอย่างน้อย 1 คู่

<u>วิธีทำ</u> จำนวนวิธีที่ทั้ง 3 คน เลือกรางวัล 8 อย่าง ซ้ำกันได้ คือ $8 \times 8 \times 8 = 521$

จำนวนวิธีที่ทั้ง 3 คน เลือกรางวัล 8 อย่าง ไม่ซ้ำกัน คือ $8 \times 7 \times 6 = 336$

ให้ A คือเหตุการณ์ที่เลือกรางวัลไม่ซ้ำกันเลย

$$P(A) = \frac{336}{512}$$

A’ คือเหตุการณ์ที่เลือกรางวัลซ้ำกันอย่างน้อย 1 คู่

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{336}{512} = 0.34$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ทั้ง 3 คน เลือกรางวัลซ้ำกันอย่างน้อย 1 คู่ เท่ากับ 0.34

3.4.3 กฎการคูณและความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Multiplication rules and conditional probability)

กฎการคูณ สามารถนำมาใช้ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์สองเหตุการณ์หรือมากกว่าที่เกิดขึ้นตามลำดับ เช่น ถ้าเราโยนเหรียญหนึ่งเหรียญ และทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก เราสามารถหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัวในการโยนเหรียญ และ ได้แต้ม 4 ในการทอดลูกเต๋า โดยเหตุการณ์สองเหตุการณ์นี้กล่าวได้ว่าเป็นอิสระกัน (independent) เนื่องจากผลลัพธ์ของเหตุการณ์แรก (การโยนเหรียญ) ไม่ได้มีผลกระทบต่อความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่สอง (การทอดลูกเต๋า)

เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน (independent events) ถ้าการเกิดเหตุการณ์ A ไม่มีผลกระทบต่อความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ B

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์สองเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกันที่เกิดขึ้นตามลำดับกันนั้น เราต้องหาความน่าจะเป็นของ แต่ละเหตุการณ์แยกจากกันเสียก่อน แล้วจึงคูณความน่าจะเป็นที่ได้เข้าด้วยกัน

กฎการคูณ 1

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่**เป็นอิสระกัน** ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ทั้งสองจะเกิดขึ้น เท่ากับ

$$P(A \text{ และ } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ตัวอย่าง 3.46 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก และสีขาว 5 ลูก สุ่มหยิบมา 2 ครั้ง โดยหยิบทีละลูกแล้วใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ได้สีน้ำเงินทั้ง 2 ครั้ง

   <u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลได้สีน้ำเงิน ครั้งที่ 1

   B คือเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลได้สีน้ำเงิน ครั้งที่ 2

   A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ เพราะเป็นการหยิบโดยใส่คืน เหตุการณ์ A ไม่มีผลกระทบต่อเหตุการณ์ B ดังนั้นความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงิน 2 ลูก = $P(A \cap B)$

   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100} = 0.04$$

2. ได้สีน้ำเงินและสีขาวตามลำดับ

   <u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบลูกบอลได้สีน้ำเงิน

   B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบลูกบอลได้สีขาว

   A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ เพราะเป็นการหยิบโดยใส่คืน เหตุการณ์ A ไม่มีผลกระทบต่อเหตุการณ์ B

   ดังนั้นความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีน้ำเงินและสีขาวตามลำดับ

   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{100} = 0.1$$

3. ได้สีแดงและสีน้ำเงินตามลำดับ

   <u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบลูกบอลได้สีแดง

   B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบลูกบอลได้สีน้ำเงิน

   ดังนั้นความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีน้ำเงินตามลำดับ

   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{100} = 0.06$$

ตัวอย่าง 3.47 ในการหยิบไพ่ 3 ใบแบบใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่ควีน คิง และเอซ ตามลำดับ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบไพ่ได้ควีน

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบไพ่ได้คิง

C คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 3 หยิบไพ่ได้เอซ

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่หยิบได้ไพ่ควีน คิง และเอซ ตามลำดับ

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot \mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P}(C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{64}{140608}$$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้กล่าวถึงเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกันโดยการเกิดเหตุการณ์แรกไม่ส่งผลกระทบต่อโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สอง ในทางตรงกันข้ามถ้าการเกิดเหตุการณ์แรกมีผลกระทบต่อการเกิดเหตุการณ์ที่สอง จะกล่าวได้ว่าทั้งสองเหตุการณ์นั้น ***ไม่เป็นอิสระต่อกัน (dependent)***

ตัวอย่าง โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

ถ้าให้ A คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกแรกขึ้นแต้ม 1

B คือเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มของลูกเต๋าทั้งสองน้อยกว่า 4

ดังนั้น A = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)}

B = {(1,1), (1,2), (2,1)}

จะได้ $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

แต่ถ้าเราทราบว่าในการทดลองสุ่มนั้น เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแน่นอนแล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B จะมีค่าเท่าไร นั่นคือ

เมื่อ เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เราจะพิจารณาเฉพาะในเหตุการณ์ A ซึ่งจะถือว่าเป็น Sample space ชุดใหม่ที่ประกอบด้วย Sample point ในเหตุการณ์ A เท่านั้น

ปรากฏว่า A มีจำนวน sample point เท่ากับ 6 ในจำนวนนี้เป็น sample space ของ B เพียง 2 sample point เท่านั้น เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ภายใต้เงื่อนไขของเหตุการณ์ A เกิดขั้นแล้ว คือ $P(B|A) = \frac{2}{6}$

เรียก การหาความน่าจะเป็นแบบนี้ว่า ***ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)***

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ *B* เมื่อเหตุการณ์ *A* ได้เกิดขึ้นแล้วเรียกว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ *B* ภายใต้เงื่อนไขว่าเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว (Conditional probability of *B* given *A*) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ *P*(*B*|*A*) อ่านว่า Probability of *B* given *A*

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B
คือ ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B เกิด ขึ้นหลังจากเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว หาได้จากสูตร

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ตัวอย่าง 3.48 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีดำและสีขาว สุ่มเลือกลูกบอลมา 2 ลูกโดยไม่ใส่คืน ถ้าความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีดำและสีขาวคือ $\frac{15}{56}$ และ ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีดำในการหยิบครั้งแรกเท่ากับ $\frac{3}{8}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีขาวในการหยิบครั้งที่ 2 เมื่อหยิบลูกบอลได้สีดำในครั้งแรก

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบลูกบอลได้สีดำ

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบลูกบอลได้สีขาว

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{3}{8}} = \frac{15}{56} \cdot \frac{8}{3} = \frac{15}{21}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีขาวในการหยิบครั้งที่ 2 เมื่อหยิบลูกบอลได้สีดำในครั้งแรกเท่ากับ $\frac{15}{21}$

ตัวอย่าง 3.49 จากการสำรวจสุขภาพประชากรกลุ่มหนึ่งพบว่า มีผู้ป่วยด้วยโรคหัวใจ 9% ป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูง 12% ป่วยด้วยโรคหัวใจและความดันโลหิตสูง 7% จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะเป็นโรคหัวใจ ถ้าทราบว่าเขาป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูง

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยเป็นโรคความดันโลหิตสูง

B คือเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยเป็นโรคหัวใจ

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{12}{100}} = \frac{7}{100} \cdot \frac{100}{12} = \frac{7}{12}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะเป็นโรคหัวใจ ถ้าทราบว่าเขาป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูง เท่ากับ $\frac{7}{12}$

ตัวอย่าง 3.50 บริษัทขายบัตรเครดิตได้ทำการสำรวจการมีบัตรเครดิตของคนที่ไปใช้จ่ายในห้างสรรพสินค้าได้ผลดังตาราง

สถานะการทำงาน	มีบัตรเครดิต	ไม่มีบัตรเครดิต
ทำงาน	18	29
ว่างงาน	28	34

ถ้าเลือกคนมา 1 คนอย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่

1. คนนั้นจะมีบัตรเครดิตถ้าทราบว่าเขาทำงาน

   วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่สถานะทำงาน

   B คือเหตุการณ์ที่มีบัตรเครดิต

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{18}{109}}{\frac{47}{109}} = \frac{18}{109} \cdot \frac{109}{47} = \frac{18}{47}$$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คนนั้นจะมีบัตรเครดิตถ้าทราบว่าเขาทำงาน เท่ากับ $\frac{18}{47}$

2. คนนั้นจะว่างงานเมื่อทราบว่าเขาไม่มีบัตรเครดิต

   วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ไม่มีบัตรเครดิต

   B คือเหตุการณ์ที่สถานะว่างงาน

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{34}{109}}{\frac{63}{109}} = \frac{34}{109} \cdot \frac{109}{63} = \frac{34}{63}$$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คนนั้นจะว่างงานเมื่อทราบว่าเขาไม่มีบัตรเครดิต เท่ากับ $\frac{34}{63}$

ตัวอย่าง 3.51 ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีผู้มีอายุตั้งแต่ 20 ถึง 60 ปีอยู่ 500 คน เมื่อแบ่งตามเพศและสภาพการมีงานทำแล้ว ได้ตัวเลขดังนี้

เพศ	การมีงานทำ		รวม
	มีทำ	ไม่มีทำ	
ชาย	230	10	240
หญิง	70	190	260
รวม	300	200	500

ถ้าเลือกคนในหมู่บ้านมา 1 คนเพื่อเป็นตัวแทนของหมู่บ้าน

1. หาความน่าจะเป็นที่ผู้ได้รับเลือกเป็นผู้ชายโดยกำหนดว่าจะต้องเป็นผู้มีงานทำ

   วิธีทำ ให้ A คือเหตุการณ์ที่ผู้มีงานทำ

   B คือเหตุการณ์ที่เป็นเพศชาย

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{230}{500}}{\frac{300}{500}} = \frac{230}{500} \cdot \frac{500}{300} = \frac{23}{30}$$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ได้รับเลือกเป็นผู้ชายโดยกำหนดว่าจะต้องเป็นผู้มีงานทำ เท่ากับ $\frac{23}{30}$

2. ถ้ากำหนดว่าต้องเป็นผู้หญิงจงหาความน่าจะเป็นที่คนนั้นจะไม่มีงานทำ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่เป็นเพศหญิง

B คือเหตุการณ์ที่เป็นไม่มีงานทำ

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{190}{500}}{\frac{260}{500}} = \frac{190}{500}\cdot\frac{500}{260} = \frac{19}{26}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คนนั้นจะไม่มีงานทำ ถ้ากำหนดว่าต้องเป็นผู้หญิง เท่ากับ $\frac{19}{26}$

กฎการคูณ 2

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่**ไม่เป็นอิสระกัน** ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ทั้งสองจะเกิดขึ้น เท่ากับ

$$P(A \text{ และ } B) = P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$$

ตัวอย่าง 3.52 คน ๆ หนึ่งมีแผ่น CD เพลงอยู่ 30 แผ่น โดยเป็นเพลงลูกทุ่ง 5 แผ่น หากเลือก CD มา 2 แผ่น โดยสุ่ม ให้หาความน่าจะเป็นที่ CD ทั้งสองแผ่นจะเป็นเพลงลูกทุ่ง

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบได้เพลงลูกทุ่ง

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบได้เพลงลูกทุ่ง

ความน่าจะเป็นที่จะได้เพลงลูกทุ่งทั้งสองแผ่น คือ $P(A\cap B)$

$P(A) = \frac{5}{30}$

$P(B|A) = \frac{4}{29}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว (หยิบเพลงลูกทุ่งไปแล้ว *1* แผ่น)

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = \frac{5}{30}\cdot\frac{4}{29} = \frac{20}{870} = \frac{2}{87}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ CD ทั้งสองแผ่นจะเป็นเพลงลูกทุ่ง เท่ากับ $\frac{2}{87}$

ตัวอย่าง 3.53 หยิบไพ่มาสองใบจากสำรับ โดยหยิบทีละใบแล้วไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่โพแดงทั้งสองใบ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 หยิบได้โพแดง

B คือเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 หยิบได้โพแดง

ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่โพแดงทั้งสองใบ คือ $P(A\cap B)$

$P(A) = \frac{13}{52}$

$P(B|A) = \frac{12}{51}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว (โพแดงหยิบไปแล้ว *1* ใบ)

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = \frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่โพแดงทั้งสองใบ เท่ากับ $= \frac{1}{17}$

ตัวอย่าง 3.54 กล่องใบหนึ่งมีปากกา 5 ด้าม เป็นสีน้ำเงิน 3 ด้าม สีแดง 2 ด้าม ถ้าหยิบปากกาอย่างสุ่มครั้งละ 1 ด้าม เมื่อได้ปากกาด้ามแรกแล้วไม่ใส่กลับคืน หยิบปากกาด้ามที่สองจากที่เหลือ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ปากกาทั้ง 2 ด้ามเป็นสีน้ำเงิน

<u>วิธีทำ</u> ให้ *A* เป็นเหตุการณ์ที่ปากกาด้ามแรกเป็นสีน้ำเงิน

B เป็นเหตุการณ์ที่ปากกาด้ามที่สองเป็นสีน้ำเงิน

ความน่าจะเป็นที่จะได้ปากกาทั้ง 2 ด้ามเป็นสีน้ำเงิน คือ $P(A \cap B)$

$P(A) = \frac{3}{5}$

$P(B|A) = \frac{2}{4}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว (ปากกาสีน้ำเงิน หยิบไปแล้ว *1* ด้าม)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ปากกาทั้ง 2 ด้ามเป็นสีน้ำเงิน เท่ากับ $\frac{3}{10}$

ตัวอย่าง 3.55 ในการหยิบไพ่ 3 ใบ จากสำรับแบบไม่ใส่คืน ให้หาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ไพ่ทั้งสามใบเป็น jack

   <u>วิธีทำ</u> ให้ *A* เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 1 ได้ jack

   B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 2 ได้ jack

   C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 3 ได้ jack

   ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ทั้งสามใบเป็น jack คือ $P(A \cap B \cap C)$

   $P(A) = \frac{4}{52}$

   $P(B|A) = \frac{3}{51}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว (ไพ่ *jack* หยิบไปแล้ว *1* ใบ)

   $P(C|B) = \frac{2}{50}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *B* เกิดขึ้นแล้ว (ไพ่ *jack* หยิบไปแล้ว *2* ใบ)

   $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{24}{132600} = \frac{1}{5525}$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่ทั้งสามใบเป็น jack เท่ากับ $\frac{1}{5525}$

2. ได้ไพ่เอซ, คิง, และควีน ตามลำดับ

   <u>วิธีทำ</u> ให้ *A* เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 1 ได้ เอซ

   B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 2 ได้ คิง

   C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 3 ได้ ควีน

   ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่เอซ, คิง, และควีน ตามลำดับคือ $P(A \cap B \cap C)$

   $P(A) = \frac{4}{52}$

   $P(B|A) = \frac{4}{51}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว

$P(C|B) = \frac{4}{50}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *B* เกิดขึ้นแล้ว

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} = \frac{64}{132600} = \frac{8}{16575}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่เอซ, คิง, และควีน ตามลำดับ เท่ากับ $\frac{8}{16575}$

3. ได้ไพ่โพธิ์ดำ, ดอกจิก, และโพธิ์แดง ตามลำดับ

<u>วิธีทำ</u> ให้ *A* เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 1 ได้ โพธิ์ดำ

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 2 ได้ ดอกจิก

C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 3 ได้ โพธิ์แดง

ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่โพธิ์ดำ, ดอกจิก, และโพธิ์แดง ตามลำดับคือ $P(A \cap B \cap C)$

$P(A) = \frac{13}{52}$

$P(B|A) = \frac{13}{51}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว

$P(C|B) = \frac{13}{50}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *B* เกิดขึ้นแล้ว

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{50} = \frac{2197}{132600}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่โพธิ์ดำ, ดอกจิก, และโพธิ์แดง ตามลำดับเท่ากับ $\frac{2197}{132600}$

4. ได้โพธิ์ดำทั้งสามใบ

<u>วิธีทำ</u> ให้ *A* เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 1 ได้ โพธิ์ดำ

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 2 ได้ โพธิ์ดำ

C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่ 3 ได้ โพธิ์ดำ

ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่โพธิ์ดำทั้งสามใบ คือ $P(A \cap B \cap C)$

$P(A) = \frac{13}{52}$

$P(B|A) = \frac{12}{51}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *A* เกิดขึ้นแล้ว

$P(C|B) = \frac{11}{50}$ เนื่องจากเหตุการณ์ *B* เกิดขึ้นแล้ว

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{1716}{132600} = \frac{11}{850}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้โพธิ์ดำทั้งสามใบ เท่ากับ $\frac{11}{850}$