

บทที่ 4 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ในบทเรียนที่ผ่านมาเราได้ศึกษาถึง การหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจเพียงบางเหตุการณ์ แต่สำหรับในบทเรียนนี้เราจะศึกษาความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่มีค่าเป็นตัวเลขที่เป็นไปได้ทั้งหมดทุกกรณี ซึ่งจะเรียกความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดทุกกรณีนี้ว่าเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็น พร้อมทั้งจะศึกษาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในรูปของตัวแปรสุ่ม

การตัดสินใจในทางธุรกิจ การประกันภัย และสถานการณ์ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันนั้น จะต้องหาค่าความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นเพื่อนำข้อมูลเหล่านั้นมาประกอบในการตัดสินใจ ตัวอย่างเช่น พนักงานขายของสามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นที่เขาจะขายของได้ 0 1 2 ชิ้นหรือมากกว่านั้น ต่อวันได้ นอกจากนั้นสามารถจะคำนวณหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเหตุการณ์เหล่านี้ได้ด้วย ตัวอย่างเช่น พนักงานขายของจะสามารถคำนวณจำนวนสินค้าที่ขายได้ต่อสัปดาห์ ซึ่งถ้าค่าคอมมิชชั่นขึ้นอยู่กับจำนวนของที่ขายได้ เขาก็จะสามารถประมาณรายได้ของเขาต่อสัปดาห์ได้อีกด้วย ในบทนี้จะอธิบายถึงหลักการและการประยุกต์ของการแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distributions)

4.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variables)

การทดลองสุ่มหรือการทดลองใดๆ ที่เราไม่ทราบผลการทดลองล่วงหน้าจนกว่าจะเสร็จสิ้นการทดลองแล้วจึงจะทราบผลที่แน่นอน เช่น การทอดลูกเต๋า หรือการโยนเหรียญ เมื่อพิจารณาการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้งกำหนดให้ X แทนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น X อาจจะมีค่าเท่ากับ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 หรือในการโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง กำหนดให้ Y แทนจำนวน เหรียญที่ขึ้นหัว ดังนั้น Y อาจจะมีค่าเท่ากับ 0 , 1 , 2 ก็ได้ เราจะเรียกตัวแปร X หรือ Y ในที่นี้ว่า **ตัวแปรสุ่ม (random Variable)**

ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันที่มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง โดยค่าของมันถูกกำหนดโดยผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม หรืออาจกล่าวได้ว่า ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมน (Domain) เท่ากับ Sample space และมีพิสัย (Range) เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง

ตัวอย่างของตัวแปรสุ่ม เช่น

- หากโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง กำหนดให้ X แทนจำนวนเหรียญที่ขึ้นก้อย ดังนั้นค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ 0,1 หรือ 2
- กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีดำ 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมา 2 ลูกโดยหยิบทีละลูกแล้วไม่ใส่คืน กำหนดให้ Y คือ จำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้ ดังนั้นค่าของ Y ที่เป็นไปได้คือ 0,1 หรือ 2
- ในการชั่งน้ำหนักของเด็กแรกเกิดที่คลอด ณ โรงพยาบาลแห่งหนึ่ง กำหนดให้ Z แทนน้ำหนักของเด็กแรกเกิด ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้คือ $0 < Z < 8000$ กรัม

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า ค่าของตัวแปรสุ่มมีค่าที่เป็นไปได้แตกต่างกัน ตามชนิดของตัวแปรสุ่ม ดังนั้น เราจึงจำแนกตัวแปรสุ่มตามลักษณะของค่าของตัวแปรสุ่มได้เป็น 2 ชนิด คือ

1. ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable) ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ค่าของ X จะมีค่าได้เพียงบางค่าและค่าไม่ต่อเนื่องกัน มักจะเป็นจำนวนนับ โดยจำนวนค่าที่เป็นไปได้ของ X เป็นจำนวนจำกัดหรือไม่จำกัดแต่นับได้ เช่น ถ้าให้ X คือจำนวนนิสิตที่ขาดเรียน ค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ $0, 1, 2, \dots, n$ หรือ ถ้า Y คือจำนวนลูกฟุตบอลที่ซาร์ตใน 1 โหล ค่าของ Y ที่เป็นไปได้คือ $0, 1, 2, \dots, 12$ เป็นต้น

2. ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous random variable) ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ค่าของ X จะเป็นจำนวนจริงที่ต่อเนื่องกันและไม่สามารถนับได้ เช่น ถ้า X เป็นส่วนสูงของนิสิตชั้นปีที่ 1 ค่าของ X จะอยู่ในช่วง $150 - 180$ เซนติเมตร เขียนแทนด้วย $150 \leq X \leq 180$ จะเห็นได้ว่าค่าของ X มีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 150 ถึง 180 เซนติเมตร และสามารถมีค่าเป็นทศนิยมได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 4.1 จงบอกว่าตัวแปรสุ่มในแต่ละข้อเป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องหรือชนิดไม่ต่อเนื่อง

1. จำนวนนิสิตที่ขาดเรียน
2. เวลาที่นิสิตใช้ในการสอบ
3. อุณหภูมิในแต่ละวัน
4. จำนวนวันที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า 20 องศาเซลเซียส
5. ความสูงของตึกที่สร้างขึ้นในเขตกรุงเทพมหานคร
6. ความหนาของชั้นหิน
7. จำนวนชั้นหินที่พบในภูเขาแห่งหนึ่ง

4.2 การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distribution)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม แล้ว X จะมีค่าที่เป็นไปได้หลาย ๆ ค่า ซึ่งแต่ละค่าของตัวแปรสุ่ม X อาจเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นที่แตกต่างกัน เราสามารถที่จะแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนี้ได้ โดยความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(X = x)$ ซึ่งหมายถึงค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เมื่อ X มีค่าเท่ากับ x พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

หากโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง ให้ X เป็นจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัว

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT\}$
จะได้ $x = 0, 1, 2, 3$

$P(X = 0)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลย
 $P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$P(X = 1)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัว 1 เหรียญ
 $P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญหัว 2 เหรียญ
 $P(X = 2) = \frac{3}{8}$

$P(X = 3)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัว 3 เหรียญ
 $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

สามารถแสดงค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ทุกๆ ค่าที่เป็นไปได้ดังนี้

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

เรียกว่าตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า $P(X = x)$ จะมีค่าเป็นเท่าใดขึ้นอยู่กับค่าของ x หรืออาจกล่าวได้ว่า $P(X = x)$ เป็นฟังก์ชันของ x จึงสามารถเขียนแทนได้ด้วย $f(x)$ จากตารางเช่น $f(0) = \frac{1}{8}$, $f(1) = \frac{3}{8}$, $f(2) = \frac{3}{8}$ และ $f(3) = \frac{1}{8}$ เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distribution Function)

นอกจากนี้ยังสามารถหาค่าของ $P(X \leq x)$ หรือ $P(X \geq x)$ หรือ $P(b \leq X \leq a)$ ได้ เช่น

$P(X < 3)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัวน้อยกว่า 3 เหรียญ
 $P(X < 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

$P(X \geq 2)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัวมากกว่าหรือเท่ากับ 2 เหรียญ
 $P(X \geq 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(1 < X < 3)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นระหว่าง 1 เหรียญ กับ 3 เหรียญ
 $P(1 < X < 3) = \frac{3}{8}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันที่แสดงค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดค่าของตัวแปรสุ่ม X ในการทดลอง

4.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องที่สำคัญ (Discrete Probability Distribution)

การทดลองสุ่มแบบทั่วไป หากเราพิจารณาจะพบว่าในบางการทดลองสุ่มนั้น ลักษณะของตัวแปรสุ่มจะมีลักษณะคล้ายๆ กัน ถึงแม้ว่าจะเป็น การทดลองคนละชนิดกัน เช่น ในการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง สนใจจำนวนครั้งที่ขึ้นหัว จำนวนครั้งที่ขึ้นหัวจะมีค่าเป็นไปได้คือ 0,1,2 หรือ 3 และ ในการศึกษาเพศของบุตร โดยสนใจจำนวนบุตรที่เป็นหญิง จากครอบครัวที่มีบุตร 3 คน จะได้ว่าจำนวนบุตรหญิงที่เป็นไปได้คือ 0,1,2 หรือ 3 เช่นเดียวกัน ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่า ลักษณะของตัวแปรสุ่มจะมีลักษณะคล้ายๆ กัน จึงตั้งชื่อการแจกแจงความน่าจะเป็นของการทดลองที่มีลักษณะคล้ายๆ กันนี้ว่าเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นทวินาม (Binomial distribution) และยังมี การแจกแจงของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องแบบอื่นๆ ที่สำคัญ เช่น การแจกแจงปัวซอง (Poisson distribution) เป็นต้น

4.3.1 การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial distribution)

การทดลองแบบทวินาม

การทดลองใดๆ ที่ประกอบด้วยการกระทำซ้ำๆ ที่เป็นอิสระกัน และผลที่เกิดขึ้นเป็นไปได้เพียงสองอย่าง คือความสำเร็จ (success) และความไม่สำเร็จ (failure) เช่น การโยนเหรียญหนึ่งอัน 5 ครั้ง เป็นการกระทำที่ซ้ำๆ กัน 5 ครั้ง ซึ่งแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน กล่าวคือ ผลที่ได้จากการโยนเหรียญในแต่ละครั้งไม่ขึ้นต่อกันและผลจากการโยนเหรียญแต่ละเหรียญจะมีผลเกิดขึ้นได้เพียงสองอย่างคือจะได้หัวหรือได้ก้อยเท่านั้น ซึ่งหากเราสนใจผลลัพธ์ขึ้นหัว จะถือว่าการขึ้นหัวเป็นความสำเร็จ ส่วนการขึ้นก้อยเป็นความไม่สำเร็จ สำหรับตัวอย่างการโยนเหรียญนี้ความน่าจะเป็นของการขึ้นหัวในแต่ละครั้งเท่ากับ $1/2$ และความน่าจะเป็นที่จะขึ้นก้อยในแต่ละครั้งเท่ากับ $1/2$ เรียกการทดลองแบบนี้ว่าการทดลองทวินาม (binomial experiment)

อีกตัวอย่างหนึ่ง เช่น การหยิบบัลจากสำหรับครึ่งละหนึ่งใบ 3 ครั้ง โดยการหยิบบัลครั้งแรกแล้วใส่คืนก่อนการหยิบบัลต่อไป ถ้ากำหนดให้การหยิบบัลได้ไฟสีแดงเป็นความสำเร็จ และการหยิบบัลได้ไฟสีดำเป็นความไม่สำเร็จ ในแต่ละครั้งความน่าจะเป็นที่หยิบบัลได้ไฟสีแดงหรือความสำเร็จมีค่าเท่ากับ $1/2$ และความน่าจะเป็นที่หยิบบัลได้สีดำ หรือความไม่สำเร็จเท่ากับ $1/2$ จะเห็นว่าเป็นการทดลองซ้ำๆ กัน 3 ครั้ง ที่เป็นอิสระกัน การกระทำแต่ละครั้งมีผลเกิดขึ้นได้สองอย่าง และความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละครั้งมีค่าเท่ากัน การทดลองนี้จึงเรียกว่า การทดลองแบบทวินาม เช่นเดียวกัน ดังนั้นเราอาจสรุปได้ว่า

การทดลองแบบทวินามมีลักษณะทั่วๆ ไปดังนี้

1. การทดลองประกอบไปด้วยการกระทำซ้ำๆ กัน n ครั้ง
2. ในการกระทำแต่ละครั้งจะมีผลลัพธ์เกิดขึ้นได้ 2 อย่าง คือ ความสำเร็จ และ ความไม่สำเร็จ
3. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ ที่เกิดขึ้นจากการกระทำแต่ละครั้งมีค่าคงที่เท่ากับ p และความน่าจะเป็นของความสำเร็จเท่ากับ $q = 1 - p$
4. การกระทำแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินาม

$$P(X = x) = f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

เมื่อ

x คือ จำนวนครั้งของความสำเร็จ

n คือ จำนวนครั้งของการกระทำซ้ำ

p คือ ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ

q คือ ความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จ

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบทวินาม

ค่าเฉลี่ย $\mu = E(X) = np$

ความแปรปรวน $\sigma^2 = V(X) = npq$

ตัวอย่างโปรแกรม R การสร้างกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม $n=10$ และ p (ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ) เป็น 0.1 และเมื่อลองเปลี่ยนค่า p เป็น 0.3 0.5 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.1

```
> x=0:10 # กำหนดช่วงของ x ตั้งแต่ 0 ถึง n
> pr=dbinom(x,n=10,p=0.1) # คำนวณค่าความน่าจะเป็นของ x ทุกค่า เก็บไว้ในตัวแปร pr
> plot(x,pr,type = "h",ylab="probability",main="Binomial(n=10,p=0.1)") # สร้างกราฟการแจก
แจกแจงความน่าจะเป็นของ x
> points(0:10,pr,pch=16) # กำหนดจุดที่ปลายเส้นกราฟความน่าจะเป็น
```

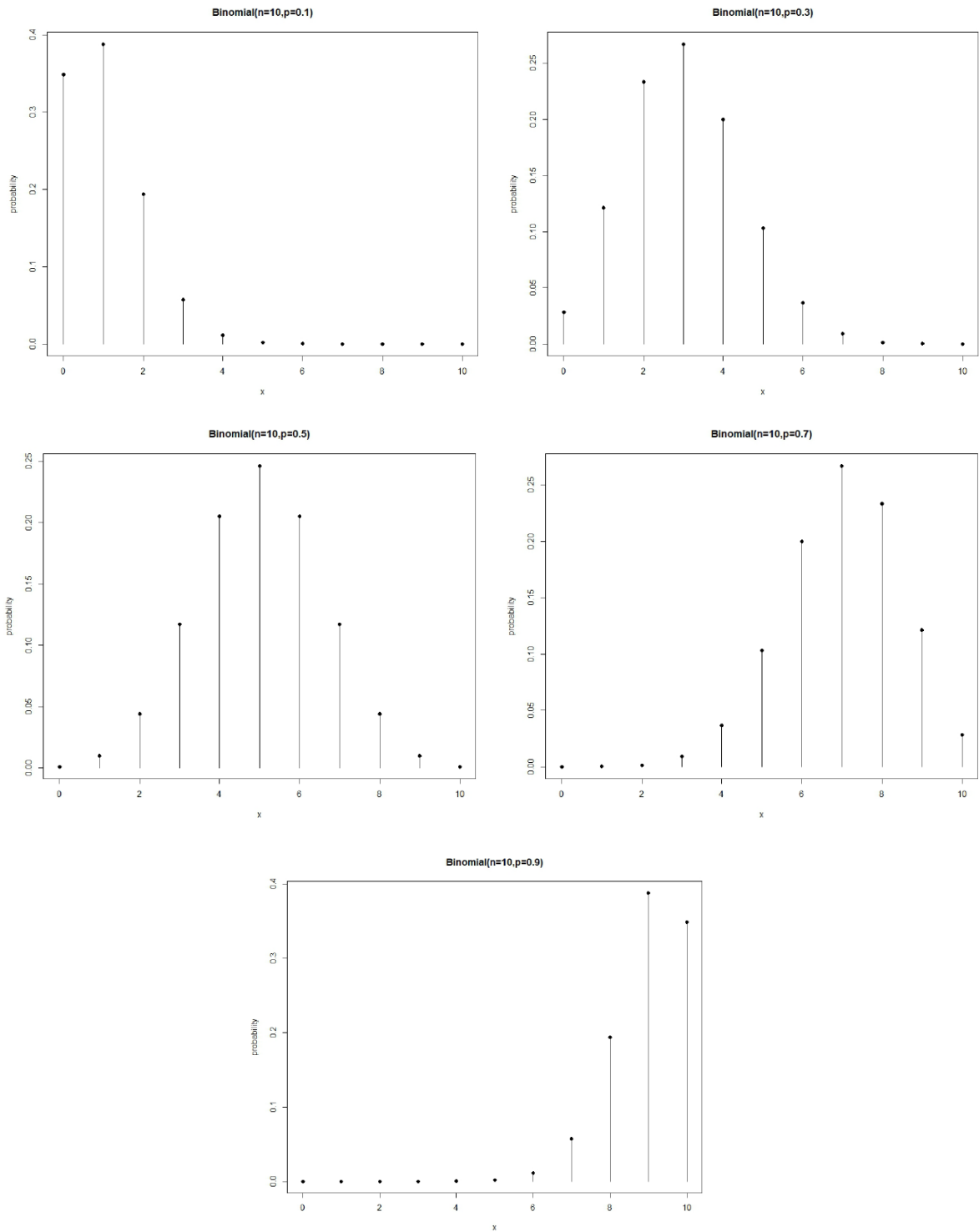
หมายเหตุ

ฟังก์ชัน `dbinom()` คำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม x ที่มีการแจกแจงทวินาม เมื่อกำหนดค่า x n และ p

ฟังก์ชัน `plot()` สร้างกราฟ โดยกำหนดตัวแปรสำหรับแกน x และ y ตามลำดับ `type=` เป็นการกำหนดชนิดของกราฟ "h" หมายถึง กราฟในแนวนอน (horizontal)

ฟังก์ชัน `points()` เป็นการกำหนดจุดที่ coordinate x,y และ `pch` คือการกำหนดรูปแบบของจุด

จากรูปที่ 4.1 จะพบว่า รูปร่างของการแจกแจงทวินามจะขึ้นอยู่กับ ค่า p โดยที่ถ้า $p = 0.1$ การแจกแจงทวินามจะมีลักษณะเบ้ขวา คือตัวแปรสุ่มมีค่าน้อยความน่าจะเป็นที่จะมีค่าสูง สำหรับ $p = 0.7$ การแจกแจงทวินามจะมีลักษณะเบ้ซ้าย คือตัวแปรสุ่มมีค่ามากความน่าจะเป็นที่จะมีค่าสูง



รูปที่ 4.1 การแจกแจงทวินาม $n=10$ $p=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9

Binomial {stats}

The Binomial Distribution

Description

Density, distribution function, quantile function and random generation for the binomial distribution with parameters `size` and `prob`.

This is conventionally interpreted as the number of 'successes' in `size` trials.

Usage

```
dbinom(x, size, prob, log = FALSE)
pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rbinom(n, size, prob)
```

Arguments

<code>x, q</code>	vector of quantiles.
<code>p</code>	vector of probabilities.
<code>n</code>	number of observations. If <code>length(n) > 1</code> , the length is taken to be the number required.
<code>size</code>	number of trials (zero or more).
<code>prob</code>	probability of success on each trial.
<code>log, log.p</code>	logical; if TRUE, probabilities <code>p</code> are given as $\log(p)$.
<code>lower.tail</code>	logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \leq x]$, otherwise, $P[X > x]$.

- **dbinom** คือการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม x ขนาดของการทดลอง `size` และ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ `prob` สัญลักษณ์คือ $P(X = x)$
- **pbinom** คือความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม q ขนาดของการทดลอง `size` และความน่าจะเป็นของการเกิดความสำเร็จ `prob` โดย `lower.tail=TRUE` หมายถึงความน่าจะเป็นสะสมเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง q สัญลักษณ์คือ $P(X \leq q)$ ถ้ากำหนด `lower.tail=FALSE` จะมีความหมายเป็นสัญลักษณ์ $P(X > q)$
- **qbinom** คือการหาค่าของตัวแปรสุ่มเมื่อกำหนดค่าความน่าจะเป็นในช่วงของการทดลองสุ่มที่สนใจ p ขนาดของการทดลอง n (`size`) และความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ p (`prob`) สัญลักษณ์คือ $P(X \leq a) = p$ เมื่อ `lower.tail=TRUE` และ สัญลักษณ์คือ $P(X > a) = p$ เมื่อ `lower.tail=FALSE`
- **rbinom** คือการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงทวินาม จำนวน n ค่า เมื่อกำหนดขนาดการทดลอง `size` ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ `prob`

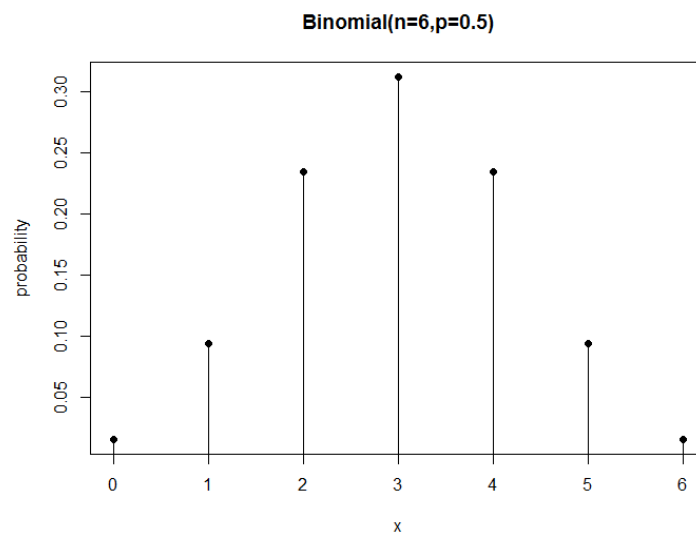
ตัวอย่างที่ 4.2 ในการโยนเหรียญ 1 อัน 6 ครั้ง

จากการทดลอง $n = 6$ $p = 0.5$

X คือจำนวนครั้งที่ขึ้นหัว ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้คือ 0,1,2,3,4,5,6

พิจารณาการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งที่โยนเหรียญขึ้นหัว ดังรูปที่ 4.2

```
> x=0:6  
> pr=dbinom(x,6,0.5)  
> plot(x,pr,type = "h",ylab="probability",main="Binomial(n=6,p=0.5)")  
> points(0:6,pr,pch=16)
```



รูปที่ 4.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งที่ขึ้นหัวจากการโยนเหรียญ 6 ครั้ง

จงหาความน่าจะเป็นที่

1. จะขึ้นหัว 4 ครั้ง

ต้องการหาค่า $P(X = 4)$

```
> dbinom(4,size=6,prob=0.5)  
[1] 0.234375
```

$$P(X = 4) = f(4; 6, 0.5) = \binom{6}{4} 0.5^4 0.5^{6-4} = \frac{6!}{(6-4)! 4! (0.5^4 0.5^2)}$$

ดังนั้น $P(X = 4) = 0.234375$

2. จะขึ้นหัวน้อยกว่า 4 ครั้ง

ต้องการหาค่า $P(X < 4)$ ซึ่งเท่ากับ $P(X \leq 3)$

หาได้จาก $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

```
> a1=dbinom(0,6,0.5)
> a2=dbinom(1,6,0.5)
> a3=dbinom(2,6,0.5)
> a4=dbinom(3,6,0.5)
> a=a1+a2+a3+a4
> a
[1] 0.65625
```

หรือ

```
> pbinom(3,6,0.5)
[1] 0.65625
```

ดังนั้น $P(X < 4) = 0.65625$

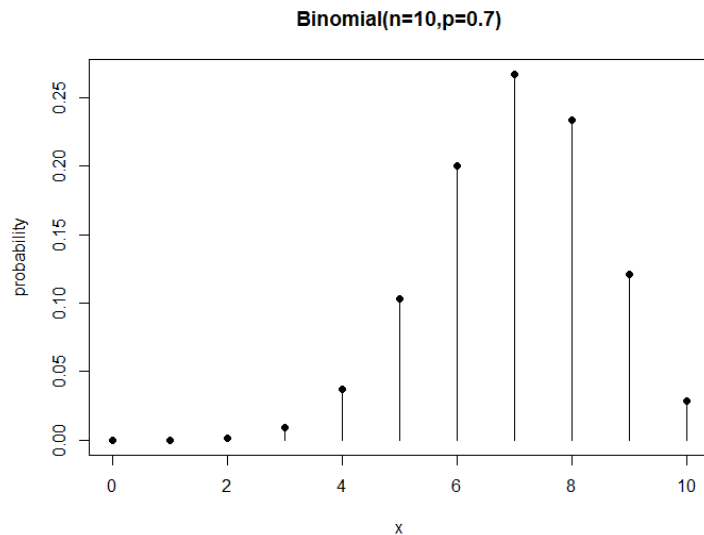
ตัวอย่างที่ 4.3 นักบาสเกตบอลคนหนึ่งมีความสามารถในการยิงลูกบอลลงห่วง 70% ถ้าเขายิงลูกบอลทั้งหมด 10 ครั้ง

จากการทดลอง $n = 10$ $p = 0.7$

X คือจำนวนครั้งที่เขายิงลูกบอลลงห่วง ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้คือ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

พิจารณาการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งที่เขายิงลูกบอลลงห่วง ดังรูปที่ 4.3

```
> x=0:10
> pr=dbinom(x,10,0.7)
> plot(x,pr,type = "h",ylab="probability",main="Binomial(n=10,p=0.7)")
> points(0:10,pr,pch=16)
```



รูปที่ 4.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งที่ยิงบอลลงห่วงจากการยิงลูกบอล 10 ครั้ง

จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เขายิงลูกบอลลงห่วงอย่างน้อย 6 ครั้ง

ต้องการหาค่า $P(X \geq 6)$

หาได้จาก $P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

```
> a1=dbinom(6,10,0.7)
> a2=dbinom(7,10,0.7)
> a3=dbinom(8,10,0.7)
> a4=dbinom(9,10,0.7)
> a5=dbinom(10,10,0.7)
> a=a1+a2+a3+a4+a5
> a
[1] 0.8497317
```

หรือ

ซึ่ง $P(X \geq 6)$ เท่ากับ $1 - P(X \leq 5)$

```
> 1-pbinom(5,10,0.7)
[1] 0.8497317
```

ดังนั้น $P(X \geq 6) = 0.8497317$

2. เขายังลูกบอลลงห่วงไม่เกิน 4 ครั้ง
ต้องการหาค่า $P(X \leq 4)$

```
> pbinom(4,10,0.7)  
[1] 0.04734899
```

ดังนั้น $P(X \leq 4) = 0.04734899$

ตัวอย่างที่ 4.4 ถ้าความน่าจะเป็นของกลอนประตูที่ชำรุดเท่ากับ 0.01 จงหาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนกลอนประตูที่ชำรุด ถ้ามีกลอนประตู 4,000 อัน

ค่าเฉลี่ย $\mu = np = 4000 \times 0.01 = 40$

ดังนั้น อาจจะมีพบกลอนประตูที่ชำรุด 40 อัน

ความแปรปรวน $\sigma^2 = npq = 4000 \times 0.01 \times 0.99 = 39.6$

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sqrt{39.6} = 6.29$

4.3.2 การแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson distribution)

การทดลองแบบปัวซอง

การทดลองที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X แสดงจำนวนครั้งของความสำเร็จในช่วงเวลาหนึ่งที่กำหนดหรือภายในบริเวณที่กำหนดให้เรียกว่าการทดลองแบบปัวซอง (poisson experiment) ช่วงเวลาที่กำหนดให้อาจจะเป็นหนึ่งนาที่หนึ่งชั่วโมง หนึ่งวัน หรือ หนึ่งปีก็ได้ ส่วนในบริเวณที่กำหนดอาจจะเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง ส่วนหนึ่งของพื้นที่หรือปริมาตรก็ได้ ตัวอย่างเช่น จำนวนครั้งที่รับโทรศัพท์ในเวลา 1 ชั่วโมงของพนักงานโทรศัพท์คนหนึ่ง หรือ จำนวนอุบัติเหตุรถชนกันที่สี่แยกแห่งหนึ่งในเวลา 1 เดือน เป็นต้น

ลักษณะของการทดลองแบบปัวซองโดยทั่วๆ ไปจะเป็นดังนี้

1. เราทราบค่าเฉลี่ย (λ) ของจำนวนความสำเร็จ (success) ที่ปรากฏขึ้นในช่วงเวลาหนึ่งหรือบริเวณหนึ่งที่กำหนด
2. ความน่าจะเป็นของการได้ความสำเร็จครั้งหนึ่งในช่วงเวลาที่ยาวนานช่วงหนึ่ง หรืออาณาบริเวณเล็กๆ บริเวณหนึ่ง ย่อมเป็นปฏิกิริยาโดยตรงกับช่วงเวลาหรือขนาดของบริเวณนั้นๆ แต่ไม่ขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นภายนอกช่วงเวลาหรือบริเวณที่กำหนด
3. ความน่าจะเป็นของการได้ความสำเร็จที่เกิดขึ้นมากกว่าหนึ่งครั้งในช่วงเวลาอันสั้น หรืออาณาบริเวณเล็กๆ มีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้

สมการของการแจกแจงปัวซอง

$$P(X = x) = f(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

เมื่อ

λ คือ ค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหรืออาณาบริเวณที่กำหนด

e คือ ค่าเอกซ์โปเนนเชียลฟังก์ชัน ซึ่งมีค่าโดยประมาณ 2.71828...

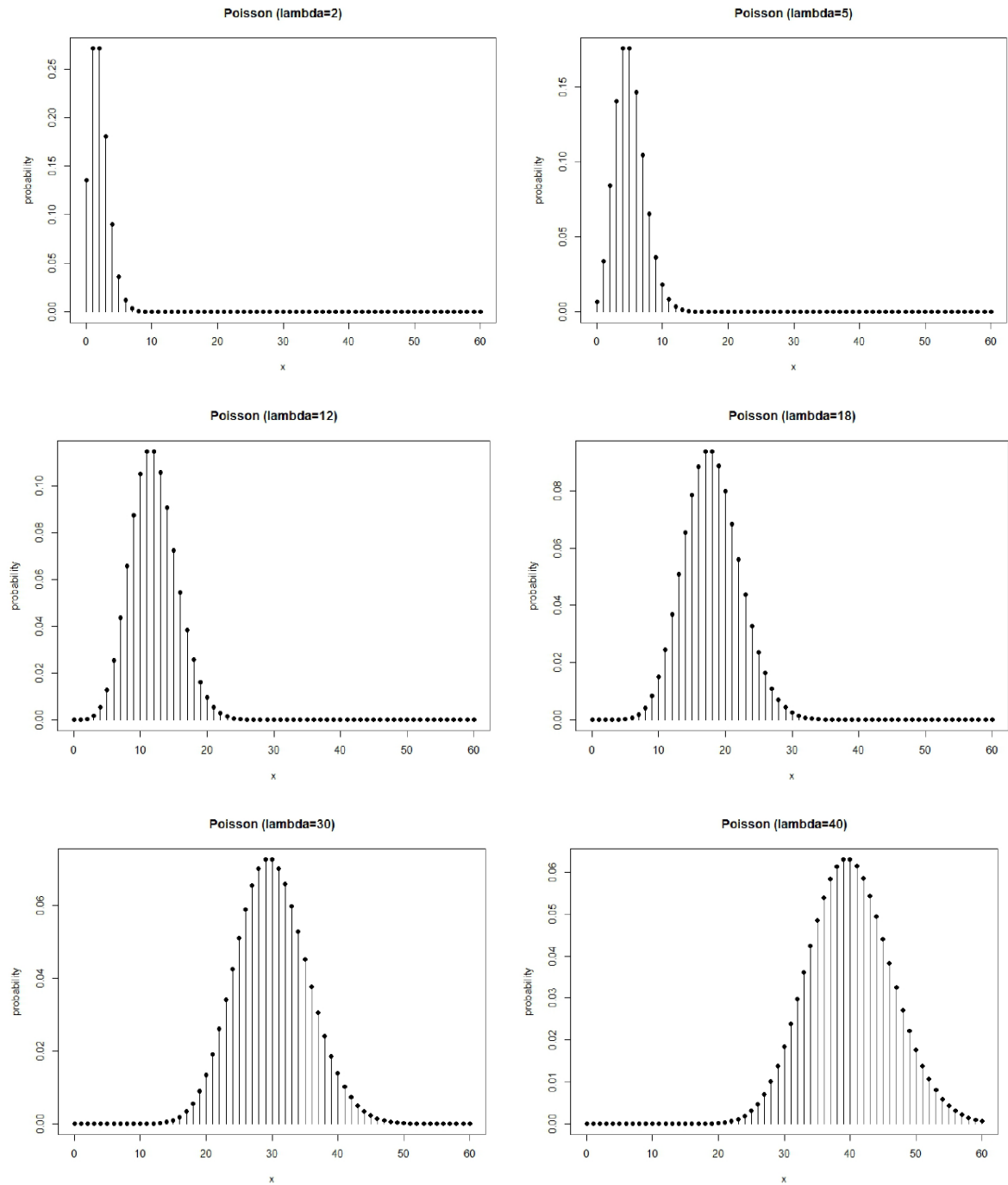
ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวซอง

ค่าเฉลี่ย $\mu = E(X) = \lambda$

ความแปรปรวน $\sigma^2 = V(X) = \lambda$

ตัวอย่างโปรแกรม R สำหรับสร้างกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซองซึ่งจะขึ้นอยู่กับ λ โดยกำหนดให้ $\lambda = 2, 5, 12, 18, 30$ และ 40 ดังรูปที่ 4.4

```
> x=0:60  
> pr=dpois(x,2) # กำหนดให้  $\lambda = 2$   
> plot(x,pr,type = "h",ylab="probability",main="Poisson (lambda=2)")  
> points(0:60,pr,pch=16)
```



รูปที่ 4.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นปัวซอง เมื่อ $\lambda = 2, 5, 12, 18, 30$ และ 40

Poisson {stats}

The Poisson Distribution

Description

Density, distribution function, quantile function and random generation for the Poisson distribution with parameter `lambda`.

Usage

```
dpois(x, lambda, log = FALSE)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rpois(n, lambda)
```

Arguments

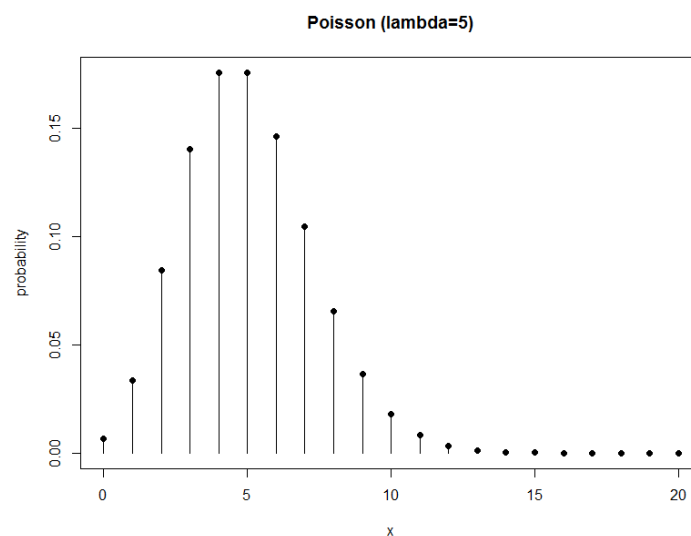
<code>x</code>	vector of (non-negative integer) quantiles.
<code>q</code>	vector of quantiles.
<code>p</code>	vector of probabilities.
<code>n</code>	number of random values to return.
<code>lambda</code>	vector of (non-negative) means.
<code>log, log.p</code>	logical; if TRUE, probabilities <code>p</code> are given as $\log(p)$.
<code>lower.tail</code>	logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \leq x]$, otherwise, $P[X > x]$.

- **dpois** คือการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม x และค่าเฉลี่ย λ สัญลักษณ์คือ $P(X = x)$
- **ppois** คือความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม q และค่าเฉลี่ย λ โดย `lower.tail=TRUE` หมายถึงความน่าจะเป็นสะสม เมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง q สัญลักษณ์คือ $P(X \leq q)$ ถ้ากำหนด `lower.tail=FALSE` จะมีความหมายเป็นสัญลักษณ์ $P(X > q)$
- **qpois** คือการหาค่าของตัวแปรสุ่มเมื่อกำหนดค่า ความน่าจะเป็นในช่วงของการทดลองสุ่มที่สนใจ p และค่าเฉลี่ย λ สัญลักษณ์คือ $P(X \leq a) = p$ เมื่อ `lower.tail=TRUE` และ สัญลักษณ์คือ $P(X > a) = p$ เมื่อ `lower.tail=FALSE`
- **rpois** คือการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง จำนวน n ค่า เมื่อกำหนดค่าเฉลี่ย λ

ตัวอย่างที่ 4.5 จากการสำรวจอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นบนถนนสายหนึ่งพบว่า จะมีอุบัติเหตุเกิดขึ้นโดยเฉลี่ย 5 ครั้งต่อหนึ่งวัน

X คือจำนวนครั้งในการเกิดอุบัติเหตุในช่วงเวลา 1 วัน มีค่าที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, 3, ...
และมีค่า $\lambda = 5$ ครั้งต่อหนึ่งวัน กราฟการแจกแจงแสดงดังรูปที่ 4.5

```
> x=0:20
> pr=dpois(x,5)
> plot(x,pr,type = "h",ylab="probability",main="Poisson (lambda=5)")
> points(0:20,pr,pch=16)
```



รูปที่ 4.5 กราฟการแจกแจงปัวซอง ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 5

จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุบนถนนสายนี้

1. 6 ครั้งต่อวัน

ต้องการหา $P(X = 6)$

$$P(X = 6) = f(6; \lambda) = \frac{e^{-5} 5^6}{6!}$$

```
> dpois(6,lambda=5)
[1] 0.1462228
```

ดังนั้น $P(X = 6) = 0.1462228$

2. ตั้งแต่ 6 ครั้งขึ้นไปต่อวัน

ต้องการหา $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$

```
> 1-ppois(5,5)
[1] 0.3840393
```

ดังนั้น $P(X \geq 6) = 0.3840393$

3. ไม่ต่ำกว่า 3 ครั้งต่อวัน

ต้องการหา $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$

```
> 1-ppois(2,5)
[1] 0.875348
```

ดังนั้น $P(X \geq 3) = 0.875348$

4. น้อยกว่า 4 ครั้งต่อวัน

ต้องการหา $P(X < 4) = P(X \leq 3)$

```
> ppois(3,5)
[1] 0.2650259
```

ดังนั้น $P(X < 4) = 0.2650259$

5. มากกว่า 12 ครั้งต่อ 2 วัน

เนื่องจากหน่วยเวลาเปลี่ยนเป็นต่อ 2 วัน ดังนั้นจะต้องปรับค่าของ λ ใหม่จาก $\lambda = 5$ ต่อหนึ่งวัน เป็น $\lambda = 10$ ต่อ 2 วัน

ต้องการหา $P(X > 12) = P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12)$

```
> 1-ppois(12,10)
[1] 0.2084435
```

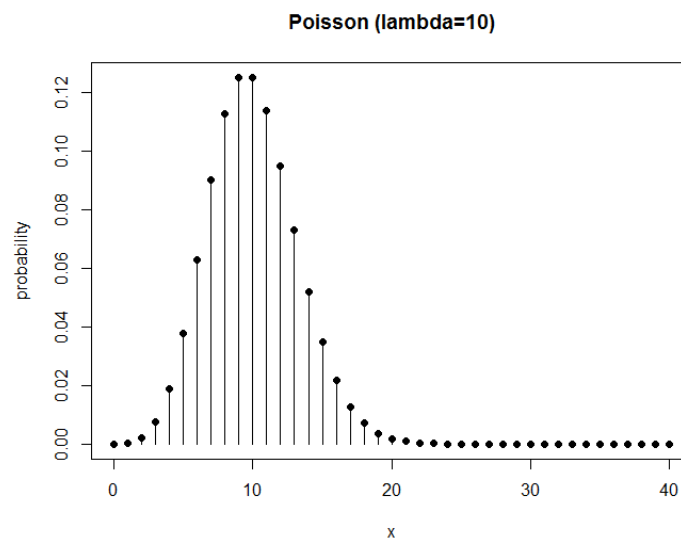
ดังนั้น $P(X > 12) = 0.2084435$

ตัวอย่างที่ 4.6 จำนวนเฉลี่ยของตึกแดงต่อพื้นที่นา 1 ตารางวาเท่ากับ 10 ตั้ว

X คือจำนวนตึกแดงต่อพื้นที่นา 1 ตารางวา มีค่าที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, 3, ...

และมีค่า $\lambda = 10$ ต่อพื้นที่ 1 ตารางวา กราฟการแจกแจงแสดงดังรูปที่ 4.6

```
> x=0:40  
> pr=dpois(x,10)  
> plot(x,pr,type = "h",ylab="probability",main="Poisson (lambda=10)")  
> points(0:40,pr,pch=16)
```



รูปที่ 4.6 กราฟการแจกแจงปัวซอง ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 10

จงหาความน่าจะเป็นที่มีตึกแดง

1. ไม่เกิน 15 ตั้ว ต่อพื้นที่นา 1 ตารางวา

ต้องการหา $P(X \leq 15)$

```
> ppois(15,10)  
[1] 0.9512596
```

ดังนั้น $P(X \leq 15) = 0.9512596$

2. มากกว่าหรือเท่ากับ 8 ตั้วต่อพื้นที่นา 1 ตารางวา

ต้องการหา $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

```
> 1-ppois(7,10)  
[1] 0.7797794
```

ดังนั้น $P(X \geq 8) = 0.7797794$

3. น้อยกว่า 7 ตัว ต่อพื้นที่นา 1 ตารางวา

ต้องการหา $P(X < 7) = P(X \leq 6)$

```
> ppois(6,10)
[1] 0.1301414
```

ดังนั้น $P(X < 7) = 0.1301414$

4. มากกว่า 23 ตัว ต่อพื้นที่ 2 ตารางวา

เนื่องจากหน่วยพื้นที่เปลี่ยนเป็นต่อนา 2 ตารางวา ดังนั้นจะต้องปรับค่าของ λ ใหม่จาก $\lambda = 10$ ต่อพื้นที่ 1 ตารางวา เป็น $\lambda = 20$ ต่อพื้นที่ 2 ตารางวา

ต้องการหา $P(X > 23) = P(X \geq 24) = 1 - P(X \leq 24)$

```
> 1-ppois(24,20)
[1] 0.1567726
```

ดังนั้น $P(X > 23) = 0.1567726$

5. น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 ตัวต่อพื้นที่ 0.5 ตารางวา

เนื่องจากหน่วยพื้นที่เปลี่ยนเป็นต่อ 0.5 ตารางวา ดังนั้นจะต้องปรับค่าของ λ ใหม่จาก $\lambda = 10$ ต่อพื้นที่ 1 ตารางวา เป็น $\lambda = 5$ ต่อพื้นที่ 0.5 ตารางวา

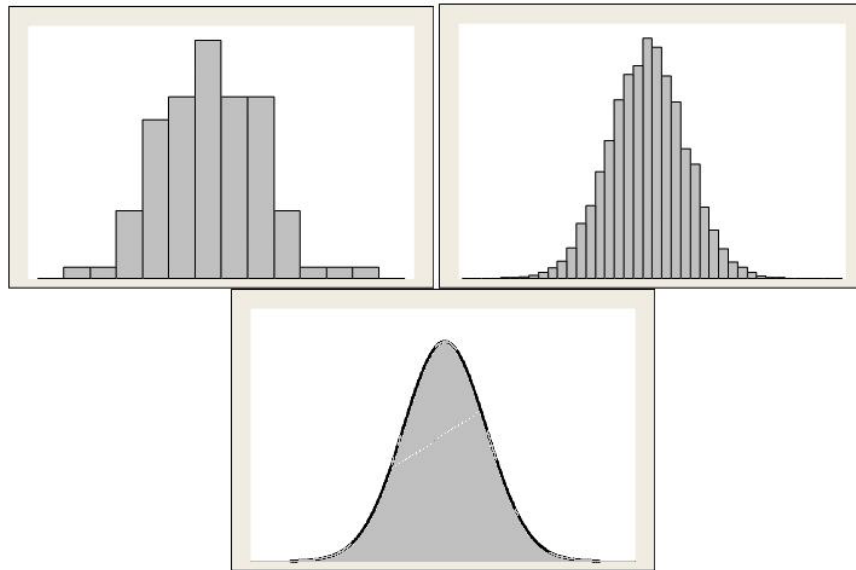
ต้องการหา $P(X \leq 3)$

```
> ppois(3,5)
[1] 0.2650259
```

ดังนั้น $P(X \leq 3) = 0.2650259$

4.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่สำคัญ

กรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าอยู่ในช่วง ๆ หนึ่ง และมีค่ามากมายไม่จำกัด ซึ่งไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดค่าของตัวแปรสุ่มแต่ละค่าได้ ดังนั้นการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องจะใช้ความหมายของแผนภูมิแท่งความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency Histogram) โดยที่ถ้าเราใช้ข้อมูลจำนวนน้อย ความกว้างของแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะกว้าง แต่ถ้าเราใช้ข้อมูลจำนวนมากยิ่งขึ้นและลดความกว้างของ แท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้เล็กลง จะได้ว่า ความถี่สัมพัทธ์ของแต่ละขั้นนั้นก็คือความน่าจะเป็นของแต่ละขั้นนั่นเอง และจะได้ฮิสโทแกรมเป็นแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดแคบลง แต่มีจำนวนแท่งมากยิ่งขึ้น จนในที่สุดที่ปลายของแท่งจะเห็นต่อกันกลายเป็นเส้นโค้งที่มีลักษณะต่อเนื่องกัน ดังรูปที่ 4.7 โดยพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งทั้งหมดจะเท่ากับ 1



รูปที่ 4.7

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ X จะมีค่าที่เป็นไปได้ในช่วง $[a, b]$ โดยที่ $a < b$ ความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งจะเป็นศูนย์ ดังนั้นเมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องจะหาความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าในช่วงใดช่วงหนึ่ง เท่านั้น

หลักการของการอินทิกรัลจำกัดเขตถูกนำมาประยุกต์เพื่อใช้ในการศึกษาความน่าจะเป็นของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง เมื่อเราทราบฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบต่างๆ โดยการอินทิเกรตฟังก์ชันในช่วงของ X ที่กำหนด เป็นการหาพื้นที่ใต้โค้ง โดยพื้นที่ใต้โค้งนั้นจะแสดงถึงความน่าจะเป็นในช่วงของ X ที่กำหนด ดังรูปที่ 4.8

เนื่องจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นนี้สร้างขึ้นมาจากพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชันที่อยู่เหนือแกน X ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1 ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม X มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b จะหาได้จากพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชันระหว่าง $X = a$ กับ $X = b$

พิจารณา

$$P(X = c) = \int_c^c f(x)dx = 0$$

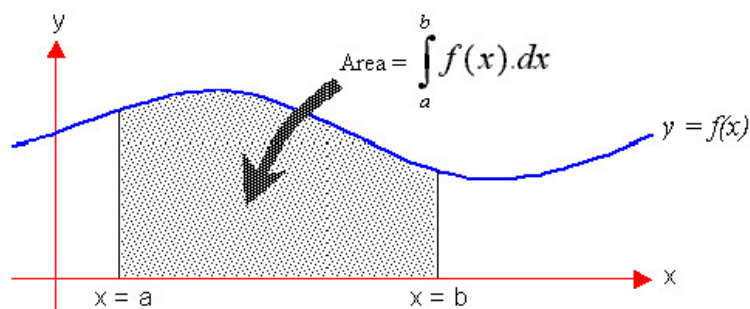
จะได้ $P(X = c) = 0$ นั่นคือความน่าจะเป็นที่ x จะมีค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งจะเป็นศูนย์

ดังนั้น

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

และ

$$P(a < x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a \leq x \leq b)$$



รูปที่ 4.8 การหาพื้นที่ใต้โค้งด้วยการอินทิเกรต

ในส่วนนี้เราจะศึกษาถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่สำคัญบางชนิด ได้แก่

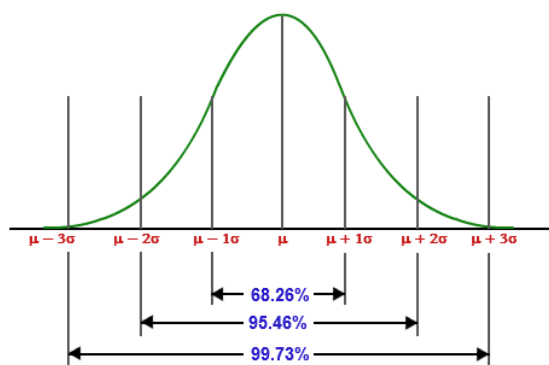
1. การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)
2. การแจกแจงไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)
3. การแจกแจงที (t Distribution)
4. การแจกแจงเอฟ (F Distribution)

4.4.1 การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่มีความสำคัญและใช้กันอย่างแพร่หลายคือตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ เนื่องจากข้อมูลส่วนใหญ่ เช่น ส่วนสูง ระดับคอเลสเตอรอลในเลือด อุณหภูมิของร่างกาย ฯลฯ จะมีลักษณะการแจกแจงเป็นรูประฆังคว่ำ เรียกว่าโค้งปกติ (normal curve) ซึ่งจะเรียกลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่มดังกล่าวว่า **การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)**

คุณสมบัติของโค้งปกติ

1. เส้นโค้งปกติจะมีลักษณะสมมาตรรอบค่าเฉลี่ย
2. ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยม จะมีค่าเท่ากันและมีค่าอยู่ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของข้อมูล
3. พื้นที่ใต้โค้งปกติทั้งหมด คือความน่าจะเป็นซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 หรือ 100%
4. พื้นที่ใต้โค้งปกติระหว่าง ± 1 ของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ประมาณ 68% พื้นที่ระหว่าง ± 2 ของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ประมาณ 95% และพื้นที่ระหว่าง ± 3 ของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ประมาณ 99% ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 พื้นที่ใต้โค้งการแจกแจงปกติ

สมการและกราฟ

ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติเรียกว่า ตัวแปรสุ่มปกติ (normal random variable) ถ้า μ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มปกติ และ σ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มปกติ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $N(X; \mu, \sigma^2)$ จะได้สมการของเส้นโค้งปกติดังนี้

ตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

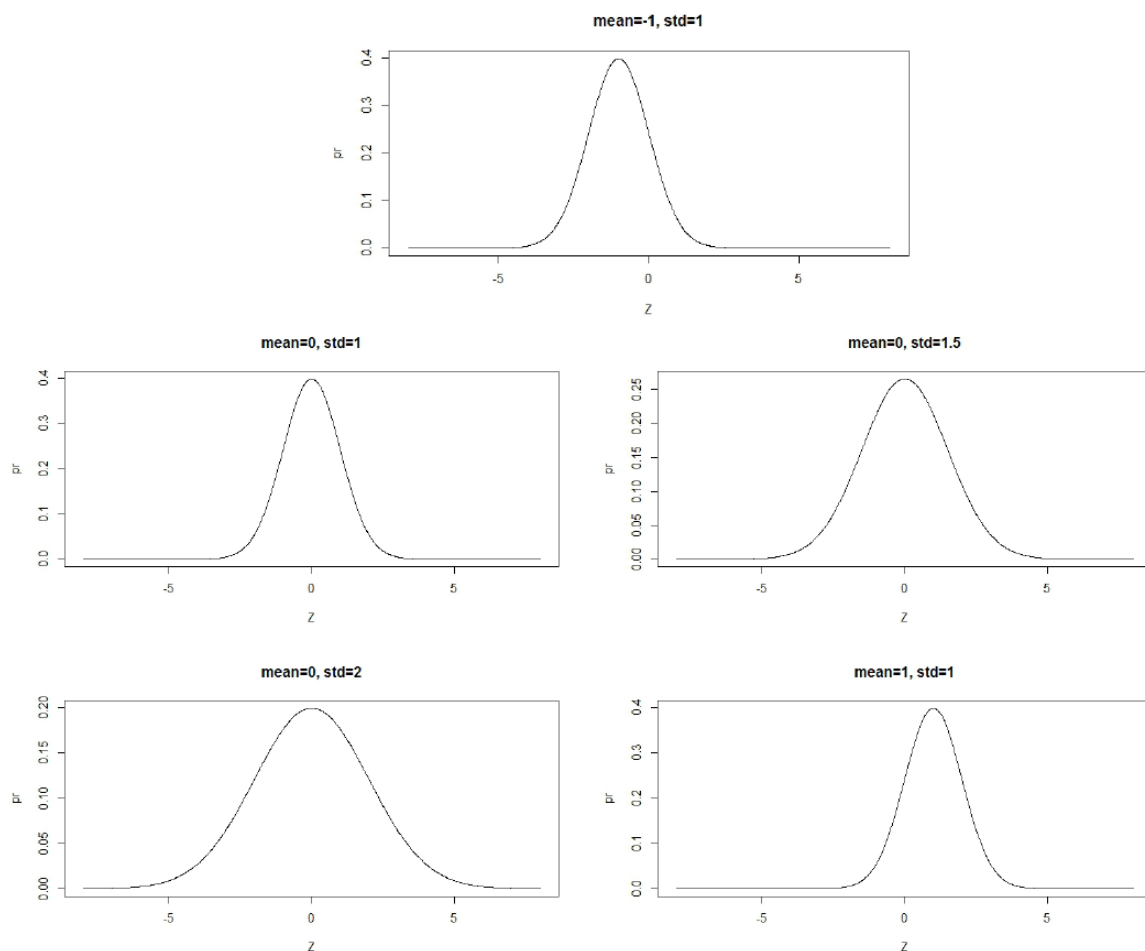
เมื่อ $\pi = 3.14159\dots$, $e = 2.71828\dots$ และมีพารามิเตอร์ μ เมื่อ $-\infty < \mu < \infty$ และ $\sigma > 0$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มปกติ

$$E(X) = \mu \text{ และ } V(X) = \sigma^2$$

กราฟการแจกแจงปกติจะมีรูปร่างขึ้นอยู่กับการเลือกค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ แสดงดังรูปที่ 4.10

```
> x=seq(-8,8,0.01)
> pr=dnorm(x,-1,1) # ค่าเฉลี่ยเป็น -1 และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1
> plot(x,pr,type="l",xlab = 'X',main = "mean=-1, std=1")
```



รูปที่ 4.10 กราฟการแจกแจงปกติ

4.4.2 การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution)

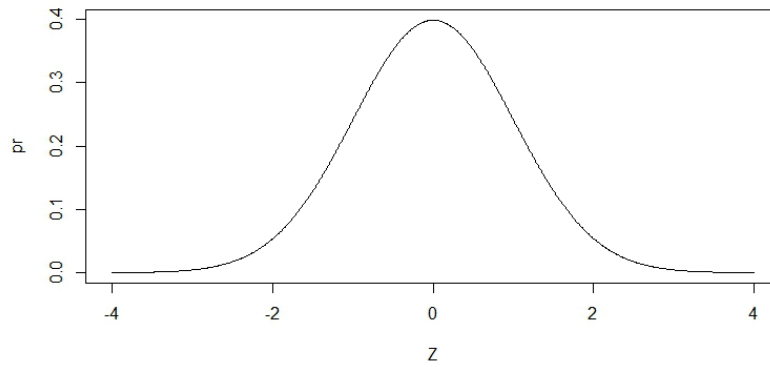
ในกรณี $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ สมการของโค้งปกติจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$$

เรียกการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 นี้ว่าการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) และโดยปกติมักใช้อักษร Z แทนตัวแปรสุ่มของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ดังนั้น สมการของ Z คือ

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty$$

และกราฟของสมการจะมีลักษณะเป็นโค้งปกติดังรูปที่ 4.11 ซึ่งมีค่าเฉลี่ยของการแจกแจงจะอยู่ที่ $Z = 0$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1 ความแปรปรวนเท่ากับ 1



รูปที่ 4.11 กราฟการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ และความแปรปรวนเป็น σ^2 แล้วตัวแปรสุ่ม Z จะมีค่าเป็น

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ในการหาค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติเราสามารถคำนวณได้โดยการอินทิเกรตฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ

$$P(Z < a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ฟังก์ชันใน R สำหรับการแจกแจงปกติ

Normal {stats}
R Documentation

The Normal Distribution

Description

Density, distribution function, quantile function and random generation for the normal distribution with mean equal to `mean` and standard deviation equal to `sd`.

Usage

```
dnorm(x, mean = 0, sd = 1, log = FALSE)
pnorm(q, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qnorm(p, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rnorm(n, mean = 0, sd = 1)
```

Arguments

<code>x, q</code>	vector of quantiles.
<code>p</code>	vector of probabilities.
<code>n</code>	number of observations. If <code>length(n) > 1</code> , the length is taken to be the number required.
<code>mean</code>	vector of means.
<code>sd</code>	vector of standard deviations.
<code>log, log.p</code>	logical; if TRUE, probabilities <code>p</code> are given as <code>log(p)</code> .
<code>lower.tail</code>	logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \leq x]$ otherwise, $P[X > x]$.

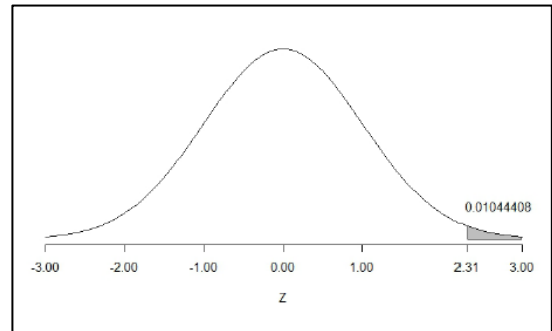
- **dnorm** คือการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม x ค่าเฉลี่ย μ และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน sd สัญลักษณ์คือ $P(X = x)$
- **pnorm** คือความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม q ค่าเฉลี่ย μ และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน sd โดย `lower.tail=TRUE` หมายถึงความน่าจะเป็นสะสมเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง q สัญลักษณ์คือ $P(X \leq q)$ ถ้ากำหนด `lower.tail=FALSE` จะมีความหมายเป็นสัญลักษณ์ $P(X > q)$
- **qnorm** คือการหาค่าของตัวแปรสุ่ม a เมื่อกำหนดค่า ค่าเฉลี่ย μ และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน sd สัญลักษณ์คือ $P(X \leq a) = p$ เมื่อ `lower.tail=TRUE` และ สัญลักษณ์คือ $P(X > a) = p$ เมื่อ `lower.tail=FALSE`
- **rnorm** คือการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติจำนวน n ค่า ค่าเฉลี่ย μ และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน sd

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Z ต่อไปนี้

1. $P(Z \geq 2.31)$

```
> 1-pnorm(2.31)
[1] 0.01044408
```

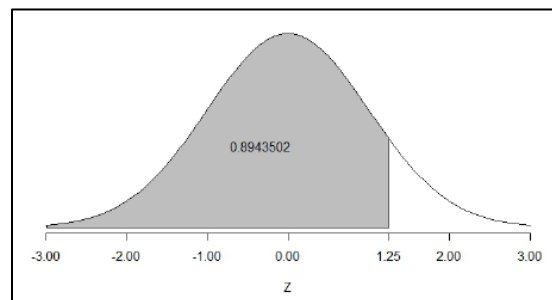
ดังนั้น $P(Z \geq 2.31) = 0.01044408$



2. $P(Z < 1.25)$

```
> pnorm(1.25)
[1] 0.8943502
```

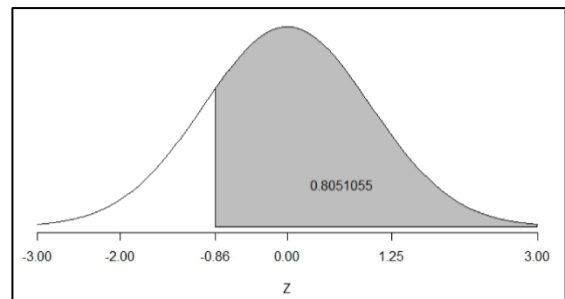
ดังนั้น $P(Z < 1.25) = 0.8943502$



3. $P(Z > -0.86)$

```
> 1-pnorm(-0.86)
[1] 0.8051055
```

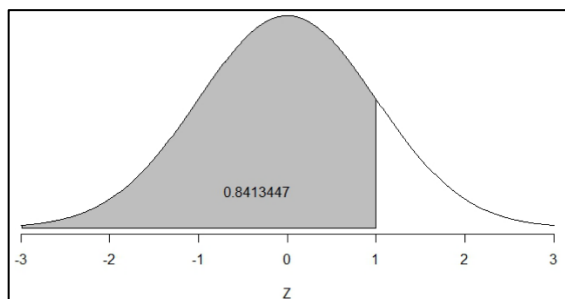
ดังนั้น $P(Z > -0.86) = 0.8051055$



4. $P(Z \leq 1.00)$

```
> pnorm(1)
[1] 0.8413447
```

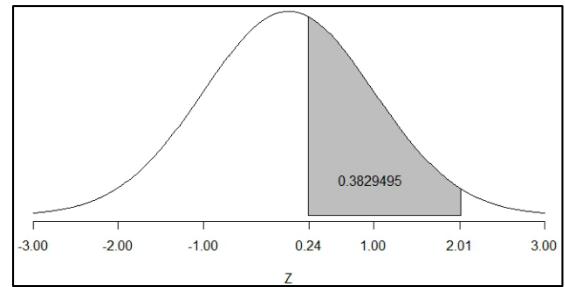
ดังนั้น $P(Z \leq 1.00) = 0.8413447$



5. $P(0.24 < Z < 2.01)$

```
> pnorm(2.01)-pnorm(0.24)
[1] 0.3829495
```

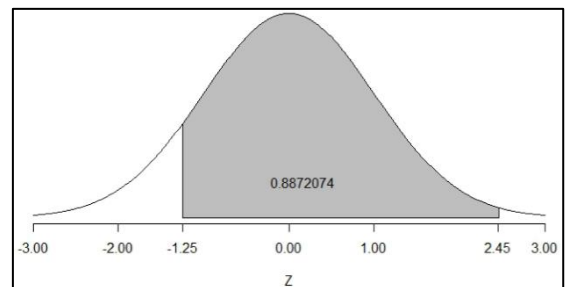
ดังนั้น $P(0.24 < Z < 2.01) = 0.3829495$



6. $P(-1.25 < Z \leq 2.45)$

```
> pnorm(2.45)-pnorm(-1.25)
[1] 0.8872074
```

ดังนั้น $P(-1.25 < Z \leq 2.45) = 0.8872074$



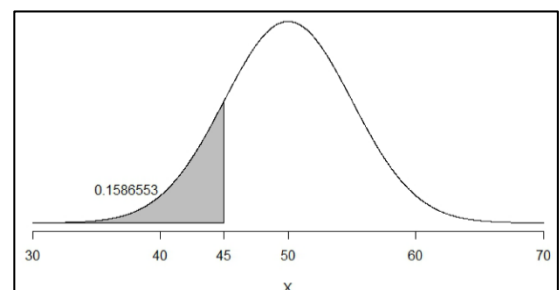
ตัวอย่างที่ 4.8 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 5 กำหนดให้ $\mu = 50$ และ $\sigma = 5$ จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่า

1. น้อยกว่า 45

ต้องการหา $P(X < 45)$

```
> pnorm(45,50,5)
[1] 0.1586553
```

ดังนั้น $P(X < 45) = 0.1586553$

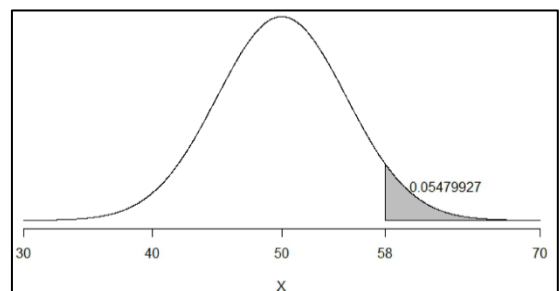


2. อย่างน้อย 58

ต้องการหา $P(X \geq 58)$

```
> 1-pnorm(58,50,5)
[1] 0.05479929
```

ดังนั้น $P(X \geq 58) = 0.05479929$



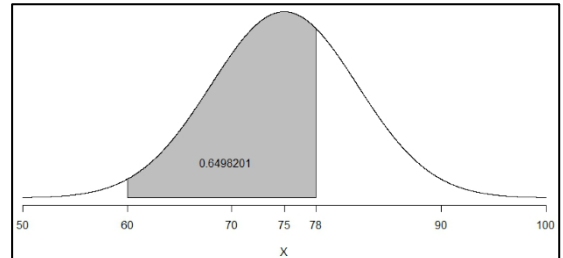
ตัวอย่างที่ 4.9 นักศึกษาชายของวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีน้ำหนักเฉลี่ย 75 กิโลกรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 7 กิโลกรัม สมมติว่าน้ำหนักมีการแจกแจงแบบปกติ กำหนดให้ $\mu = 75$ และ $\sigma = 7$ จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษามีน้ำหนัก

1. ระหว่าง 60 และ 78 กิโลกรัม

ต้องการหา $P(60 < X < 78)$

```
> pnorm(78,75,7)-pnorm(60,75,7)
[1] 0.6498201
```

ดังนั้น $P(60 < X < 78) = 0.6498201$

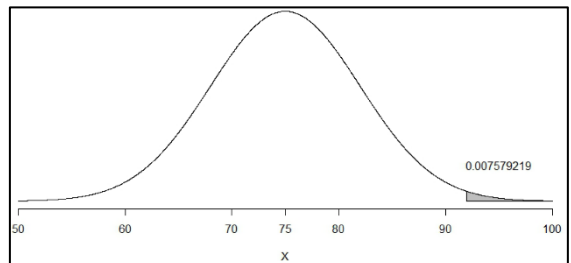


2. มากกว่า 92 กิโลกรัม

ต้องการหา $P(X > 92)$

```
> 1-pnorm(92,75,7)
[1] 0.007579219
```

ดังนั้น $P(X > 92) = 0.007579219$



ตัวอย่างที่ 4.10 จงหาค่า a ที่ทำให้

1. $P(Z < a) = 0.0025$

```
> qnorm(0.0025)
[1] -2.807034
```

ดังนั้น $a = -2.807034$

2. $P(Z < a) = 0.95$

```
> qnorm(0.95)
[1] 1.644854
```

ดังนั้น $a = 1.644854$

3. $P(Z \geq a) = 0.0244$

นั่นคือ $P(Z < a) = 0.9756$

```
> qnorm(0.9756)  
[1] 1.970335
```

ดังนั้น $a = 1.970335$

4. $P(Z \geq a) = 0.8665$

นั่นคือ $P(Z < a) = 0.1335$

```
> qnorm(0.1335)  
[1] -1.109998
```

ดังนั้น $a = -1.109998$

5. $P(0 < Z < a) = 0.4808$

นั่นคือ $P(Z < a) = 0.9808$

```
> qnorm(0.9808)  
[1] 2.070559
```

ดังนั้น $a = 2.070559$

6. $P(-a < Z < a) = 0.995$

นั่นคือ $P(Z < a) = 0.9975$

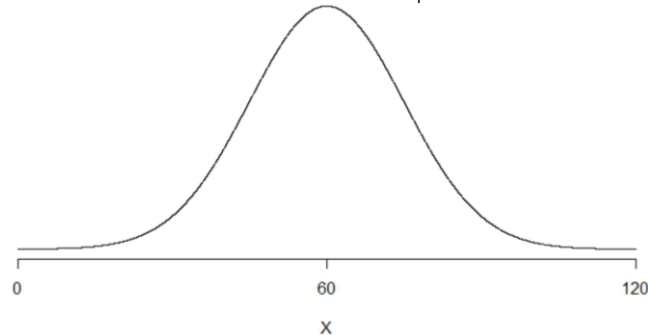
```
> qnorm(0.9975)  
[1] 2.807034
```

ดังนั้น $a = 2.807034$

ตัวอย่างที่ 4.11 ถ้าคะแนนสอบวิชาสถิติของนิสิตกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติด้วยคะแนนเฉลี่ย 60 คะแนน ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 คะแนน ถ้าอาจารย์ให้เกรด F แก่นิสิตที่ได้คะแนนต่ำสุด 10% อยากทราบว่า นิสิตจะต้องได้คะแนนอย่างน้อยเท่าใดจึงจะไม่ได้เกรด F

กำหนดให้ $\mu = 60$ และ $\sigma = 15$

จากสิ่งที่กำหนดให้คือ ถ้าอาจารย์ให้เกรด F แก่นิสิตที่ได้คะแนนต่ำสุด 10% แสดงว่า $P(X < F) = 0.1$



```
> qnorm(0.1,60,15)
[1] 40.77673
```

ดังนั้น $F = 40.77673$ คะแนน

นั่นคือนิสิตต้องได้คะแนนอย่างน้อย 40.77 คะแนนจึงจะไม่ได้เกรด F

4.5 การแจกแจงไคกำลังสอง (Chi-square distribution)

กำหนดให้ตัวแปรสุ่มไคกำลังสอง X มาจากการแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) ที่ $\alpha = \frac{\nu}{2}$ และ $\beta = 2$ โดยที่ $\nu = I^+$ แทนด้วย องศาเสรี (degree of freedom = df) และตัวแปรสุ่มไคกำลังสองมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}, x > 0$$

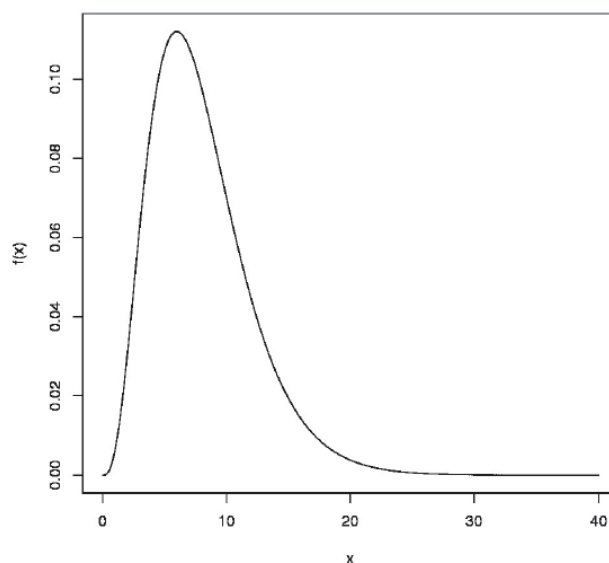
และมีค่าเฉลี่ย $E(X) = \nu$ และ ความแปรปรวน $V(X) = 2\nu$

ถ้าตัวแปรสุ่ม $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ จำนวน n ตัวเป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) $N(0,1)$ จะได้

$$Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_n^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

เมื่อ χ^2 อ่านว่า ไคกำลังสอง

กราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นดังแสดงในภาพที่ 4.10



รูปที่ 4.10 การแจกแจงไคกำลังสอง

คุณสมบัติ

1. $\chi^2 \geq 0$
2. พื้นที่ใต้กราฟรวมกันทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1
3. กราฟมีลักษณะเบ้ขวา แตกต่างกันตามค่าของ df
4. $P(\chi^2 = x) = 0$

ฟังก์ชันใน R สำหรับการแจกแจงไคกำลังสอง

Chisquare {stats}
R Documentation

The (non-central) Chi-Squared Distribution

Description

Density, distribution function, quantile function and random generation for the chi-squared (χ^2) distribution with `df` degrees of freedom and optional non-centrality parameter `ncp`.

Usage

```
dchisq(x, df, ncp = 0, log = FALSE)
pchisq(q, df, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qchisq(p, df, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rchisq(n, df, ncp = 0)
```

Arguments

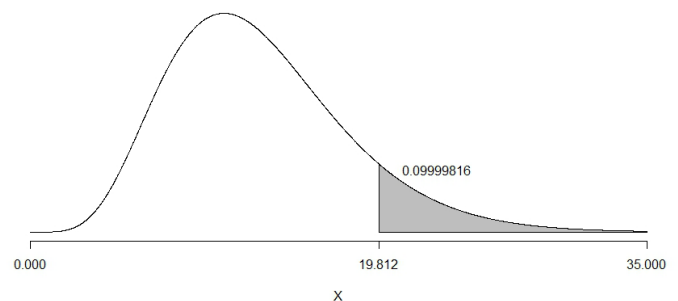
<code>x, q</code>	vector of quantiles.
<code>p</code>	vector of probabilities.
<code>n</code>	number of observations. If <code>length(n) > 1</code> , the length is taken to be the number required.
<code>df</code>	degrees of freedom (non-negative, but can be non-integer).
<code>ncp</code>	non-centrality parameter (non-negative).
<code>log, log.p</code>	logical; if TRUE, probabilities <code>p</code> are given as <code>log(p)</code> .
<code>lower.tail</code>	logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \leq x]$, otherwise, $P[X > x]$.

- **dchisq** คือการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม x องศาเสรี df สัญลักษณ์ คือ $P(X = x)$
- **pchisq** คือความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม q องศาเสรี df โดย $\text{lower.tail}=\text{TRUE}$ หมายถึงความน่าจะเป็นสะสมเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง q สัญลักษณ์คือ $P(X \leq q)$ ถ้ากำหนด $\text{lower.tail}=\text{FALSE}$ จะมีความหมายเป็นสัญลักษณ์ $P(X > q)$
- **qchisq** คือการหาค่าของตัวแปรสุ่ม a เมื่อกำหนดค่า องศาเสรี df สัญลักษณ์คือ $P(X \leq a) = p$ เมื่อ $\text{lower.tail}=\text{TRUE}$ และ สัญลักษณ์คือ $P(X > a) = p$ เมื่อ $\text{lower.tail}=\text{FALSE}$
- **rchisq** คือการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติจำนวน n ค่า องศาเสรี df

ตัวอย่างที่ 4.12 จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

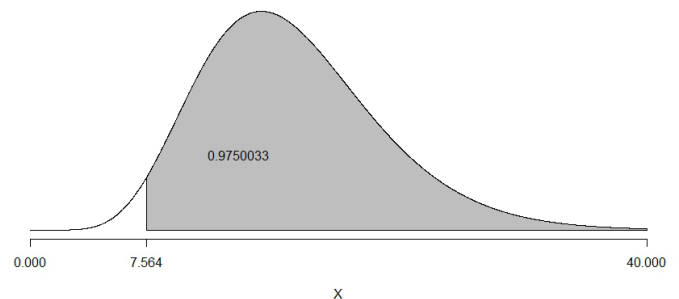
1. $P(\chi^2_{13} > 19.812)$

```
> 1-pchisq(19.812,13)
[1] 0.09999816
```



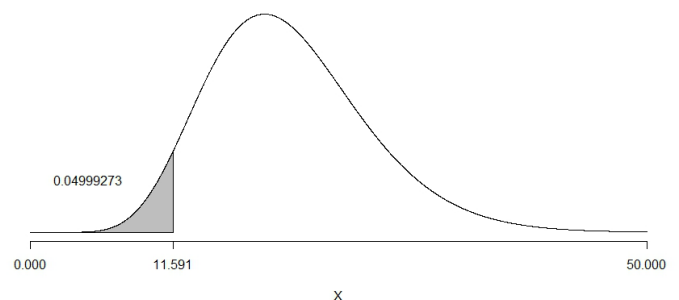
2. $P(\chi^2_{17} > 7.564)$

```
> 1-pchisq(7.564,17)
[1] 0.9750033
```



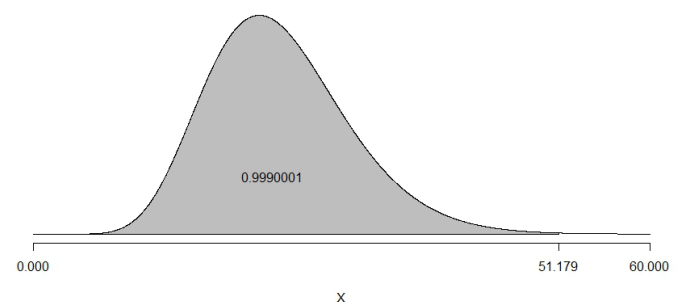
3. $P(\chi^2_{21} < 11.591)$

```
> pchisq(11.591,21)
[1] 0.04999273
```



4. $P(\chi^2_{24} < 51.179)$

```
> pchisq(51.179,24)
[1] 0.9990001
```



ตัวอย่างที่ 4.13 จงหาค่า a ต่อไปนี้

1. $\chi^2_{0.95,4}$

```
> qchisq(0.95,4)
[1] 9.487729
```

2. $\chi^2_{0.025,6}$

```
> qchisq(0.025,6)
[1] 1.237344
```

3. $P(\chi^2_2 > a) = 0.95$

```
> qchisq(0.05,2)
[1] 0.1025866
```

4. $P(\chi^2_5 > a) = 0.025$

```
> qchisq(0.975,5)
[1] 12.8325
```

5. $P(\chi^2_7 < a) = 0.995$

```
> qchisq(0.995,7)
[1] 20.27774
```

6. $P(\chi^2_{15} < a) = 0.005$

```
> qchisq(0.005,15)
[1] 4.600916
```


4.6 การแจกแจงที (t distribution)

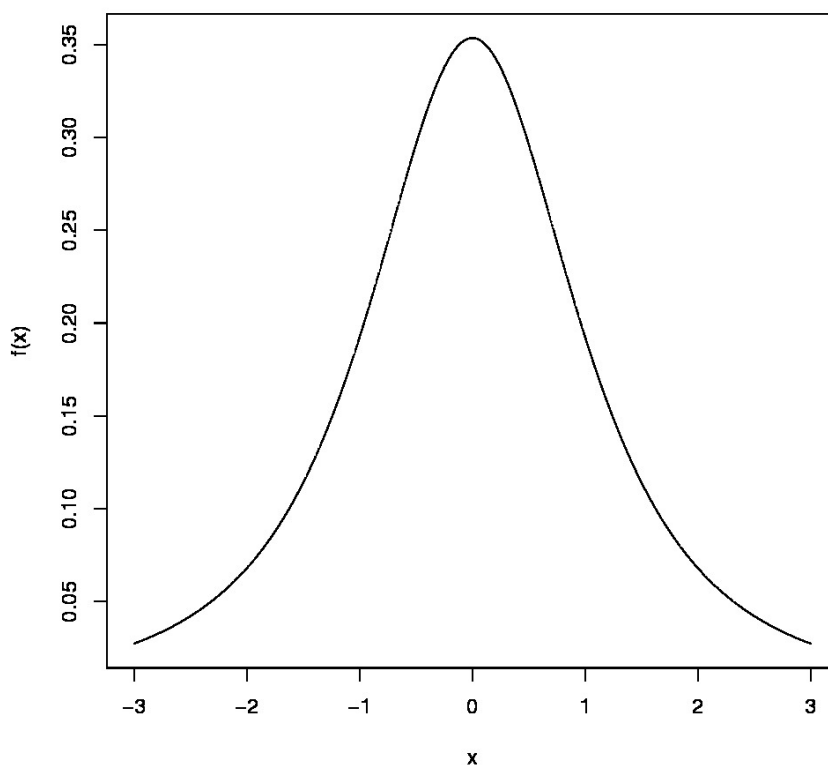
ถ้า $z \sim N(0,1)$ และ $V \sim \chi^2_{(v)}$ ให้ T เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าดังนี้

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{v}}}$$

T จะมีการแจกแจงที (Student-t) ที่มีองศาเสรี = v และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ

$$f(t) = \frac{\Gamma\left[\frac{v+1}{2}\right]}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[1 + \frac{t^2}{v}\right]^{-\frac{v+1}{2}}, -\infty < t < \infty$$

และมีกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นดังแสดงในรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 การแจกแจงที

คุณสมบัติ

1. กราฟของฟังก์ชันเป็นรูประฆังคว่ำ
2. สมการ $t = 0$ เป็นแกนสมมาตร
3. มีจุดสูงสุดอยู่จุดเดียว (unimodal) ที่ $t = 0$
4. พื้นที่ใต้กราฟรวมกันทั้งหมด มีค่าเท่ากับ 1
5. $P(t = t_0) = 0$

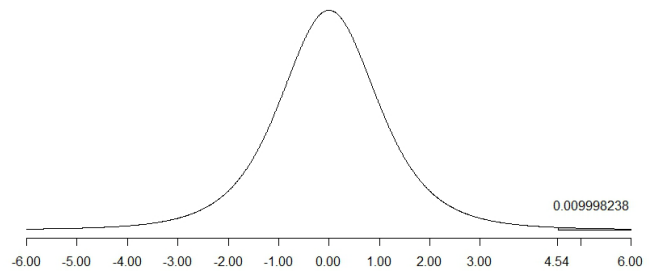
TDist {stats}	R Documentation
The Student t Distribution	
Description	
Density, distribution function, quantile function and random generation for the t distribution with <code>df</code> degrees of freedom (and optional non-centrality parameter <code>ncp</code>).	
Usage	
<pre>dt(x, df, ncp, log = FALSE) pt(q, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) qt(p, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) rt(n, df, ncp)</pre>	
Arguments	
<code>x</code> , <code>q</code>	vector of quantiles.
<code>p</code>	vector of probabilities.
<code>n</code>	number of observations. If <code>length(n) > 1</code> , the length is taken to be the number required.
<code>df</code>	degrees of freedom (> 0 , maybe non-integer). <code>df = Inf</code> is allowed.
<code>ncp</code>	non-centrality parameter <i>delta</i> ; currently except for <code>rt()</code> , only for <code>abs(ncp) <= 37.62</code> . If omitted, use the central t distribution.
<code>log</code> , <code>log.p</code>	logical; if TRUE, probabilities <code>p</code> are given as <code>log(p)</code> .
<code>lower.tail</code>	logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \leq x]$, otherwise, $P[X > x]$.

- **dt** คือการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม x องศาเสรี df สัญลักษณ์คือ $P(X = x)$
- **pt** คือความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม q องศาเสรี df โดย `lower.tail=TRUE` หมายถึงความน่าจะเป็นสะสมเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง q สัญลักษณ์คือ $P(X \leq q)$ ถ้ากำหนด `lower.tail=FALSE` จะมีความหมายเป็นสัญลักษณ์ $P(X > q)$
- **qt** คือการหาค่าของตัวแปรสุ่ม a เมื่อกำหนดค่า องศาเสรี df สัญลักษณ์คือ $P(X \leq a) = p$ เมื่อ `lower.tail=TRUE` และ สัญลักษณ์คือ $P(X > a) = p$ เมื่อ `lower.tail=FALSE`
- **rt** คือการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติจำนวน n ค่า องศาเสรี df

ตัวอย่างที่ 4.14 จงหาค่าความน่าจะเป็นต่อไปนี้

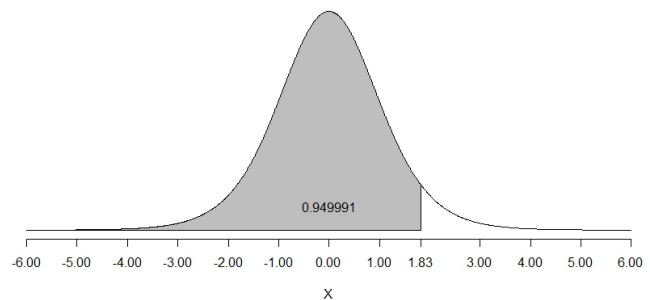
1. เมื่อ $df = 3$, $P(T > 4.541)$

$> 1 - pt(4.541, 3)$
[1] 0.009998238



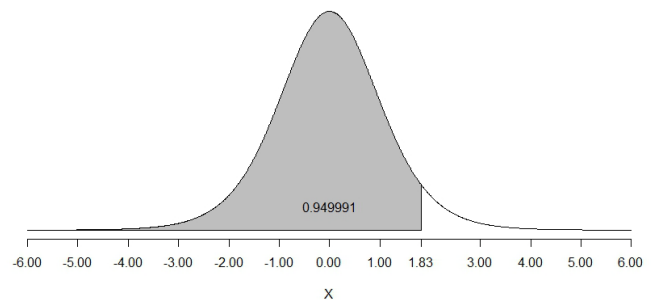
2. $df = 9$, $P(T < 1.833)$

$> pt(1.833, 9)$
[1] 0.949991



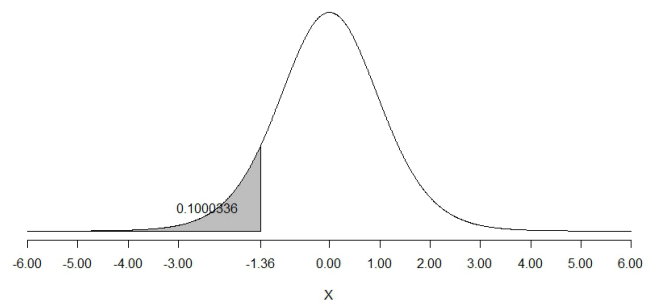
3. $df = 10$, $P(T > -4.144)$

$> 1 - pt(-4.144, 10)$
[1] 0.9990005



4. $df = 12$, $P(T < -1.356)$

$> pt(-1.356, 12)$
[1] 0.1000336



ตัวอย่างที่ 4.15 จงหาค่า t และ α ต่อไปนี้

1. $t_{0.025, 3}$

$> qt(0.025, 3)$
[1] -3.182446

2. $t_{0.975,10}$

```
> qt(0.975,10)  
[1] 2.228139
```

3. เมื่อ $df = 11$, $P(T > a) = 0.10$

```
> qt(0.9,11)  
[1] 1.36343
```

4. เมื่อ $df = 17$, $P(T < a) = 0.99$

```
> qt(0.99,17)  
[1] 2.566934
```

5. เมื่อ $df = 23$, $P(T > a) = 0.975$

```
> qt(0.025,23)  
[1] -2.068658
```

6. เมื่อ $df = 30$, $P(T < a) = 0.005$

```
> qt(0.005,30)  
[1] -2.749996
```

ตัวอย่างที่ 4.16 จงหาค่า t_0 ที่ทำให้ $P(-t_0 \leq t \leq t_0) = 0.99$ เมื่อ $df = 23$

```
> qt(0.995,23)  
[1] 2.807336
```

4.7 การแจกแจงเอฟ (F distribution)

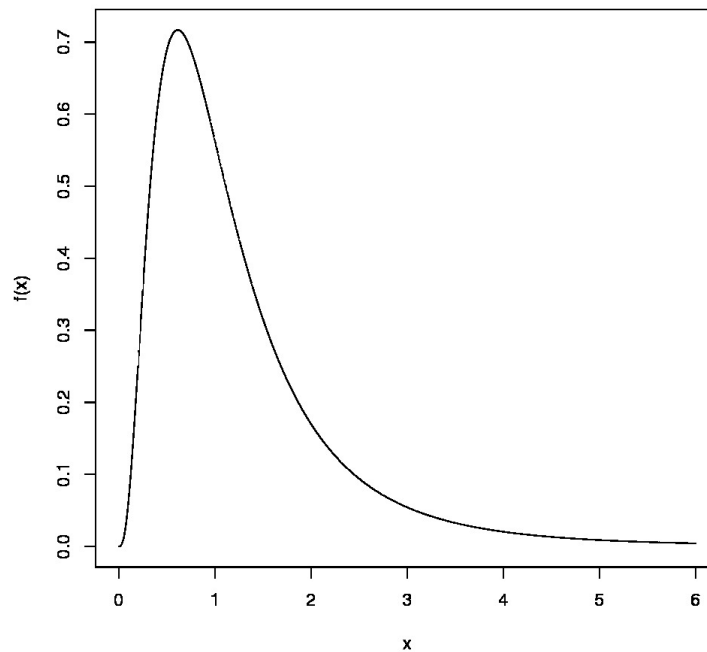
ถ้า U และ V เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ $U \sim \chi^2_{(n)}$ และ $V \sim \chi^2_{(m)}$ จะได้ว่า

$$F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}$$

เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ F มี $df1 = n$ และ $df2 = m$ และฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ F คือ

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \left(1 + \frac{nx}{m}\right)^{\frac{n+m}{2}}}, x > 0$$

และกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของเอฟแสดงในรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 การแจกแจงเอฟ

คุณสมบัติ

1. กราฟของฟังก์ชันมีลักษณะเบ้ขวา
2. พื้นที่ใต้กราฟรวมกันทั้งหมด มีค่าเท่ากับ 1
3. $F \geq 0$
4. $P(F = f_0) = 0$

FDist {stats}

R Documentation

The F Distribution

Description

Density, distribution function, quantile function and random generation for the F distribution with `df1` and `df2` degrees of freedom (and optional non-centrality parameter `ncp`).

Usage

```
df(x, df1, df2, ncp, log = FALSE)
pf(q, df1, df2, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qf(p, df1, df2, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rf(n, df1, df2, ncp)
```

Arguments

`x`, `q` vector of quantiles.
`p` vector of probabilities.
`n` number of observations. If `length(n) > 1`, the length is taken to be the number required.
`df1`, `df2` degrees of freedom. Inf is allowed.
`ncp` non-centrality parameter. If omitted the central F is assumed.
`log`, `log.p` logical; if TRUE, probabilities `p` are given as `log(p)`.
`lower.tail` logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \leq x]$, otherwise, $P[X > x]$.

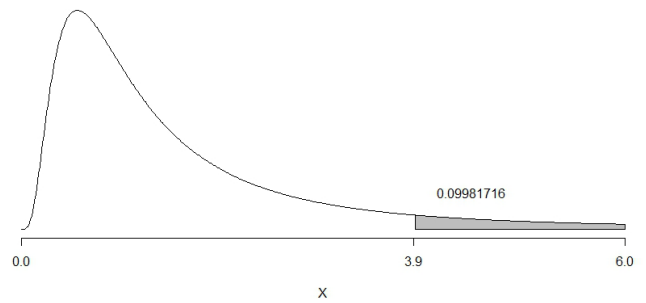
- **df** คือการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม x องศาเสรี1 `df1` และองศาเสรี2 `df2` สัญลักษณ์คือ $P(X = x)$
- **pf** คือความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดค่าตัวแปรสุ่ม q องศาเสรี1 `df1` และองศาเสรี2 `df2` โดย `lower.tail=TRUE` หมายถึงความน่าจะเป็นสะสมเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง q สัญลักษณ์คือ $P(X \leq q)$ ถ้ากำหนด `lower.tail=FALSE` จะมีความหมายเป็นสัญลักษณ์ $P(X > q)$
- **qf** คือการหาค่าของตัวแปรสุ่ม a เมื่อกำหนดค่า องศาเสรี1 `df1` และองศาเสรี2 `df2` สัญลักษณ์คือ $P(X \leq a) = p$ เมื่อ `lower.tail=TRUE` และ สัญลักษณ์คือ $P(X > a) = p$ เมื่อ `lower.tail=FALSE`
- **rf** คือการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติจำนวน n ค่า องศาเสรี1 `df1` และองศาเสรี2 `df2`

ตัวอย่างที่ 4.17 จงหาค่าความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. $P(F_{12,4} > 3.90)$

$> 1 - \text{pf}(3.9, 12, 4)$

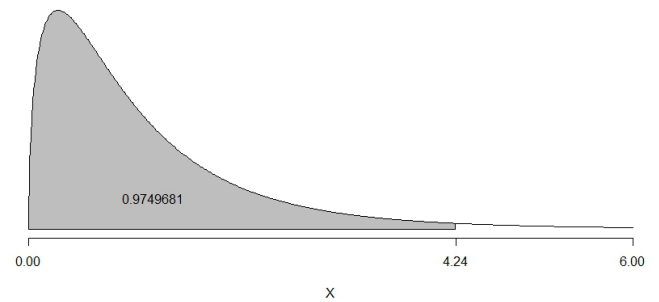
[1] 0.09981716



2. $P(F_{3,14} < 4.24)$

$> \text{pf}(4.24, 3, 14)$

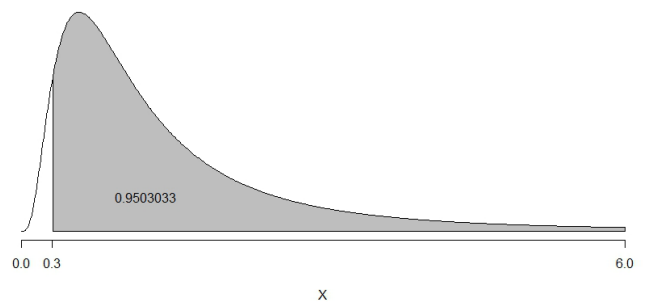
[1] 0.9749681



3. $P(F_{10,5} > 0.3)$

$> 1 - \text{pf}(0.3, 10, 5)$

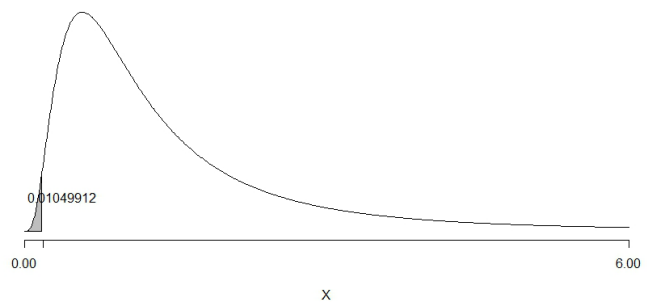
[1] 0.9503033



4. $P(F_{10,15} < 0.18)$

$> \text{pf}(0.18, 10, 5)$

[1] 0.01049912



ตัวอย่างที่ 4.18 จงหาค่า F และ α ต่อไปนี้

1. $F_{0.01, (2, 5)}$

$> \text{qf}(0.01, 2, 5)$

[1] 0.01007056

2. $F_{0.975,(2,5)}$

```
> qf(0.975,2,5)
[1] 8.433621
```

3. $P(F_{3,4} > a) = 0.05$

```
> qf(0.95,3,4)
[1] 6.591382
```

4. $P(F_{4,6} > a) = 0.90$

```
> qf(0.1,4,6)
[1] 0.2493921
```

5. $P(F_{2,10} < a) = 0.025$

```
> qf(0.025,2,10)
[1] 0.02538202
```

6. $P(F_{5,10} < a) = 0.99$

```
> qf(0.99,5,10)
[1] 5.636326
```

ตัวอย่างที่ 4.19 จงหาค่า f_1 และ f_2 ที่ทำให้ $P(f_1 < F < f_2) = 0.90$ และ $P(F \leq f_1) = 0.05$ ที่ df เท่ากับ 9 และ 15

```
> qf(0.05,9,15)
[1] 0.3326567
> qf(0.95,9,15)
[1] 2.587626
```